第一章
複數與簡諧振動
Complex Variable and Harmonic Vibration

1.1　引　言

本人 (第一作者) 在台大一直發現許多學生對以複數表示簡諧振動之基本物理意義不甚了解，甚至覺得奇怪。試著找遍多本有關振動學書籍，卻大多毫無所獲，有時遇到許多工程師也問到相同的問題，而一般書籍及論文上又常發現這種複數形式表示法，會覺得很熟悉，但又說不出其所以然，自然覺得如鯁在喉，有感於斯，於 1986 年本人主編振動與噪音專輯之便，特以小篇幅介紹這個簡單而且有趣的問題，並說明如何以複數分析簡諧振動之方法。又因簡諧振動乃一切振動分析之基礎，這也是本人寫這篇文章之另一主要目的。

2005 年 6 月 9 日在台大土木系碩士班論文口試上，遇見海洋大學陳正宗教授,他是這次論文口試委員,也是我早期台大的學生,他告訴我說：陳老師，你以前發表在機械月刊上“複數與簡諧振動”，我把它當作工數及振動學的講義,而且學生學習的效果很好,何不多加流傳,以嘉惠學生。我聽了內心很感動，這次藉研撰“結構動力學”機會，將這篇文章稍加修正並補充後，納入本書第一章，希望能獲得讀者的認同與喜愛 (該篇文章原刊登在機械月刊，第 12 卷第 5 期，1986)。

1.2 數學模擬與物理意義

一個單位簡諧力 (a unit harmonic force) 可表示為：

$$p(t) = e^{i\omega t} \tag{1.1}$$

上式中 e 代表指數函數，$i = \sqrt{-1}$，ω 代表頻率 (rad/s)，t 代表時間 (sec)，$e^{i\omega t}$ 係為著名之歐拉公式 (Euler's formula)，如下式所示：

$$e^{\pm i\omega t} = cos\,\omega t \pm i\,sin\,\omega t \tag{1.2}$$

我們必須先了解式(1.1)僅為外力 $p(t)$ 之表示法，並不表示 $p(t)$ 等於 $e^{i\omega t}$。因為外力 $p(t)$ 為一個物理量，是一個時間函數，故為實數，而 $e^{i\omega t} = cos\,\omega t + i\,sin\,\omega t$ 為一個複數，故無法等於一個實數的物理量。但究竟式(1.1)代表什麼物理意義？及 $p(t)$ 與 $e^{i\omega t}$ 之相互關係是什麼？我們利用圖 1.1 及圖 1.2 加以說明。

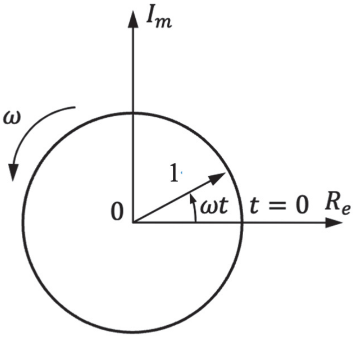


圖 1.1 單位向量 $e^{i\omega t}$ 之相位圖

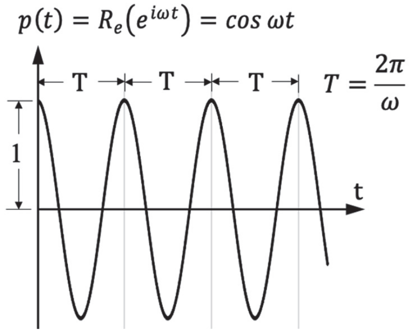


圖 1.2 $p(t) = \cos\omega t$ 之波形

圖 1.1 係代表一個相位圖，R_e 代表實數軸，I_m 代表虛數軸。圖上有一個單位向量，當時間 $t = 0$ 時，單位向量剛好與 R_e 軸重合。此單位向量以 ω之轉速作反時鐘方向轉動，故在任何時間 t，此單位向量與 R_e 軸之夾角為 ωt，故圖 1.1 上之單位向量可表示為 $e^{i\omega t}$。圖 1.2 係表示圖 1.1 上單位向量在 R_e 軸上之投影量，故呈餘弦函數 $cos\,\omega t$ 之波形變化，如果外力 $p(t) = cos\,\omega t$，則在相位圖上可表示為 $e^{i\omega t}$，所以 $p(t)$ 應等於 $e^{i\omega t}$ 之實數部份如下式所示：

$$p(t) = R_e\left(e^{i\omega t}\right) = cos\,\omega t \tag{1.3}$$

上式中 R_e 係指括弧( )內之實數部份，所以式(1.1)右邊 $e^{i\omega t}$之實數部份才是真正代表外力 $p(t)$ 之物理量，它代表單位簡諧力即 $p(t) = cos\,\omega t$。

可能有人會問如果 $p(t) = sin\,\omega t$ 則又如何以 $e^{i\omega t}$ 來表示？我們可以將此外力 $p(t)$ 表示為：

$$p(t) = -ie^{i\omega t} \tag{1.4}$$

上式右邊為 $t = 0$ 時，則單位向量剛好在 $-I_m$ 軸上，故此向量作反時鐘方向轉動時，其在 R_e 軸上之投影量即為正弦函數 $sin\,\omega t$。同樣的式(1.4)僅是一個簡諧外力之表示法，並不代表 $p(t)$ 等於 $-ie^{i\omega t}$，但 $p(t)$ 與 $-ie^{i\omega t}$ 之實數部份應相等，即：

$$p(t) = R_e\left(-ie^{i\omega t}\right) = sin\,\omega t \tag{1.5}$$

同樣地一個單位簡諧力也可表示為：

$$p(t) = e^{-i\omega t} \tag{1.6}$$

單位向量 $e^{-i\omega t}$之相位圖亦如圖 1.2 所示，但此單位向量係以 ω 轉速作順時鐘方向轉動。式(1.6)右邊取實數部分即為單位簡諧力之物理量如式(1.7)所示：

$$p(t) = R_e\left(e^{-i\omega t}\right) = cos\,\omega t \tag{1.7}$$

單位簡諧力 $p(t) = cos\,\omega t$ 之波形亦如圖 1.2 所示，同理單位簡諧力 $p(t) = sin\,\omega t$ 之波形可表示為：

$$p(t) = ie^{-i\omega t} \tag{1.8}$$

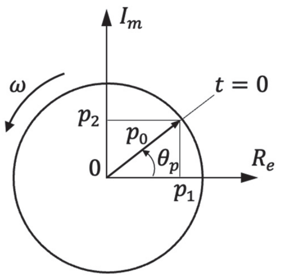
式(1.8)右邊取實數部分，即為單位簡諧力：

$$p(t) = R_e\left(ie^{-i\omega t}\right) = sin\,\omega t \tag{1.9}$$

所以任一大小及相位之簡諧力可表示為：

$$p(t) = \hat{p}e^{i\omega t} = (p_1 + ip_2)e^{i\omega t} \tag{1.10}$$

上式表示任一簡諧力 (不表示相等)，複數振幅 $\hat{p} = (p_1 + ip_2)$ 表示 $t = 0$ 之簡諧力在實數軸及虛數軸上之分量 p_1 及 p_2，其大小 (即振幅 amplitude) p_0 及相位角 (phase angle) θ_p 等如圖 1.3 所示，如果 p_1 及 p_2 均為正值，則其相位在第一象限內，簡諧力之波形如圖 1.4 所示，故該簡諧力應等於下式：



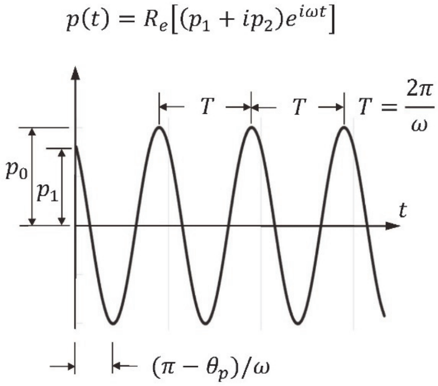


圖 1.3 向量 $(p_1 + ip_2)e^{i\omega t}$之相位圖　　圖 1.4 $p(t) = p_0\cos(\omega t + \theta_p)$之波形

$$p(t) = R_e[(p_1 + ip_2)e^{i\omega t}] = p_1 cos\,\omega t - p_2 sin\,\omega t$$

$$= p_0 cos(\omega t + \theta_p) \tag{1.11}$$

上式中p_0代表$p(t)$之振幅，θ_p代表$p(t)$之相位角如下式所示：

$$p_0 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \tag{1.12}$$

$$tan\,\theta_p = \frac{p_2}{p_1} \tag{1.13}$$

所以式(1.10)右邊係代表一個向量，其大小 (即振幅) p_0，以ω轉速作反時鐘方向轉動。當時間$t = 0$時之位置如圖 1.3 所示，與R_e軸之夾角為θ_p。該向量在R_e軸上之投影量如圖 1.4 所示，即為簡諧力 $p(t) = p_0 cos(\omega t + \theta_p)$之波形。

如果有任意二個以上之向量或簡諧力，其相位之關係為相對的，所以選擇其中之一向量之相位為參考值 (一般假設$\theta = 0$)，則其餘向量之相位關係即可由圖 1.3 之相位圖很明顯地表示出來。以上就是說明任一簡諧波形以複數表示之基本原理。以下我們來討論如何以複數分析一般簡諧運動，而且可以從分析過程中，看出這種分析方法之精神與優點所在。

1.3 單自由度系統之運動方程式、自然頻率及振動反應

一個最簡單之單自由度系統如圖 1.5 所示，包括質量塊 (質量m)、彈簧 (彈簧係數或勁度k)、黏性阻尼器 (阻尼係數c) 等所組成。質量塊m下方有光滑無摩擦力之滾輪支承或稱滾支承 (roller support)，所以質量塊m只能作水平左右方向運動，$p(t)$為外力、$y(t)$為位移。

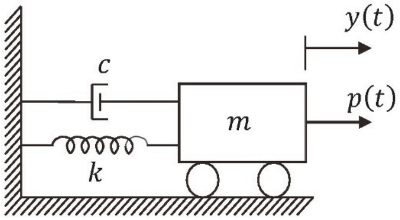


圖 1.5 單自由度系統

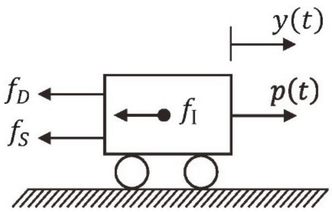


圖 1.6 自由体之動力平衡

取質量塊m為自由体 (free body) 如圖 1.6 所示，作用於質量塊m上的力量計有慣性力 (inertia force) f_I、阻尼力 (damping force) f_D、彈簧力 (spring force) f_S及外力 (applied force) $p(t)$等，由動力平衡 (dynamic equilibrium) 關係可得動力平衡方程式為：

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \tag{1.14}$$

因為f_I、f_D及f_S分別與加速度$\ddot{y}(t)$、速度$\dot{y}(t)$及位移$y(t)$有關，即：

$$\begin{aligned} f_I &= m\ddot{y} \\ f_D &= c\dot{y} \\ f_S &= ky \end{aligned} \tag{1.15}$$

將式(1.15)代入式(1.14)可得單自由度系統之運動方程式為：

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = p(t) \tag{1.16}$$

式(1.16)左右二邊同除m則變成下式：

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \frac{p(t)}{m} \tag{1.17}$$

上式中ω_n代表自然頻率 (natural frequency)，ξ代表阻尼比 (damping ratio)，分別如式(1.18)及式(1.19)所示：

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \tag{1.18}$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \tag{1.19}$$

此處我們先略做一些說明，為何$\omega_n = \sqrt{k/m}$定義為自然頻率及其物理意義是什麼？如一簡諧外力 $p(t)$ 為：

$$p(t) = p_0 \, sin \, \omega t \tag{1.20}$$

該簡諧外力 $p(t) = p_0 \, sin \, \omega t$ 作用於無阻尼 ($c = 0$) 系統，則簡諧反應 $y(t)$ 可假設為：

$$y(t) = y_0 \, sin \, \omega t \tag{1.21}$$

因為阻尼$c = 0$，所以簡諧外力 $p(t)$ 及簡諧反應 $y(t)$ 之相位相同，在相位圖上二者沒有相位差 (以後會作證明)。如有阻尼系統 (即$c \neq 0$或$\xi \neq 0$)，而一般阻尼比ξ很小，如$0 < \xi \ll 1.0$，則簡諧反應 $y(t)$ 與簡諧外力 $p(t)$ 會有相位存在，但並不影响 $y(t)$ 之簡諧形式。簡諧反應 $y(t)$ 與簡諧外力 $p(t)$ 二者之頻率ω相同，這表示譬如你聽到的音樂節拍一定會與演奏者的音樂節拍相同。

將式(1.20)及式(1.21)代入式(1.16)可得：

$$(-m\omega^2 + k)y_0 = p_0 \,, \quad if \quad c = 0 \tag{1.22}$$

如式(1.22)左邊括弧項為零，則簡諧反應y_0為無窮大，即表示有共振現象發生，所以共振條件：即外力 $p(t)$ 頻率 ω 與系統自然頻率 ω_n (如式(1.18)所示) 相同或很接近，一般工程設計需盡量避免共振發生。式(1.22)左邊括弧項 $(-m\omega^2 + k)$ 稱為動態勁度 (dynamic stiffness)，令動態勁度為零，可求出自然頻率 ω_n 如式(1.18)所示。

式(1.16)或式(1.17)為一般之一元二階常微分方程式，所以通解(general solution) 為：

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \tag{1.23}$$

上式中 $y_h(t)$ 代表齊次解 (homogeneous solution)，$y_p(t)$ 代表特解(particular solution)。因為 y_h 係與外力 $p(t)$ 無關，而且因阻尼存在會很快

衰減，所以當時間 t 增加，y_h 之作用就愈不重要，所以又稱為暫態解 (transient solution)，因其與外力無關故又稱自由振動解 (free-vibration solution) 或稱為自由振動反應 (free-vibration response)。y_p 係直接與外力 $p(t)$ 之形式有關，如外力作用的時間較為長久，因 y_h 之影响已不重要，所以 $y(t) \doteq y_p(t)$，故 y_p 又稱為穩態解 (steady-state solution)，因 y_p 與外力之形式有關，故又稱強制振動解 (forced-vibration solution)。如外力為簡諧形式 (如 $p(t) = p_0 \sin \omega t$，如式(1.20)所示)，則 $y_p(t)$ 亦為簡諧形式 (如 $y_p(t) = y_0 \sin \omega t$，如式(1.21)所示)，故 $y_p(t)$ 又稱為穩態簡諧反應 (steady-state harmonic response)。以下我們來討論如何以複數分析穩態簡諧反應 $y_p(t)$ 之基本原理。

1.4　穩態簡諧反應之複數分析法

如果 $p(t)$ 為任一形式之簡諧力，其頻率為 ω，故可以如式(1.10)之複數形式表示之，即 $p(t) = \hat{p}e^{i\omega t} = (p_1 + ip_2)e^{i\omega t}$，則穩態簡諧反應 $y_p(t)$ 亦可以複數表示如下：

$$y_p(t) = \hat{y}_p e^{i\omega t} = (y_1 + iy_2)e^{i\omega t} \tag{1.24}$$

也許有人會問為什麼穩態簡諧反應 $y_p(t)$ 可由式(1.24)表示？這又代表些什麼物理意義？一般數學書本上分析一元二階常微分方程式時，如 $p(t)$ 為簡諧形式 ($\sin \omega t$ 或 $\cos \omega t$)，則即假設 $y_p(t)$ 亦為簡諧形式 (即 $A \sin \omega t + B \cos \omega t$)。主要係基於將 $y_p(t)$ 之簡諧形式代入一元二階常微分方程式中，如式(1.16)或式(1.17)所示，令方程式二邊相等求解，並沒有提到任何物理意義。但在此我們列舉二個簡單的物理現象來說明，如當一人以 ω 頻率擊鼓，則我們所聽到的鼓聲頻率也一定是 ω。如果係以簡諧形式擊鼓，則聽到的鼓聲一定也是簡諧形式，但擊鼓與聽到鼓聲之時間可能有少許之差異，即兩者之間存在有相位之關係。又如我們聽到一首華爾滋的舞曲，我們也一定以相同之節拍 (即頻率) 跳華爾滋的舞步，這就是說明輸入 (input) $p(t)$ 與輸出 (output) $y_p(t)$ 具有同步 (相同頻率) 之物理意義。雖然 $p(t)$ 與 $y_p(t)$ 之頻率相同，但兩者物理量不同，其大小及相位

當然就不相同，所以任一簡諧力 $p(t)$ 如式(1.10)所示，則 $y_p(t)$ 就可以如式(1.24)表示之。如果系統之阻尼為零，則表示 $y_p(t)$ 與 $p(t)$ 之相位相同，所以阻尼之存在是造成相位差之主要原因，這種現象亦可由以後之式子中導出。

將式(1.10)及式(1.24)代入式(1.16)之運動方程式中，則左右二邊可同時消去$e^{i\omega t}$，並比較二邊之實數與虛數部分，即左右二邊實數部分相等及虛數部分相等，可得下列二個方程式：

$$\begin{aligned}(-m\omega^2+k)y_1-c\omega y_2&=p_1\\ c\omega y_1+(-m\omega^2+k)y_2&=p_2\end{aligned}\tag{1.25}$$

式(1.25)可寫成矩陣形式：

$$\begin{bmatrix}(-m\omega^2+k) & -c\omega\\ c\omega & (-m\omega^2+k)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}p_1\\ p_2\end{Bmatrix}\tag{1.26}$$

由式(1.26)可求y_1及y_2為：

$$\begin{aligned}y_1&=\frac{(-m\omega^2+k)p_1+c\omega p_2}{(-m\omega^2+k)^2+(c\omega)^2}\\ y_2&=\frac{-c\omega p_1+(-m\omega^2+k)p_2}{(-m\omega^2+k)^2+(c\omega)^2}\end{aligned}\tag{1.27}$$

因此 $y_p(t)$ 之大小 (即振幅) y_0 及相位角 θ_{yp} 為：

$$\begin{aligned}y_0&=\sqrt{y_1^2+y_2^2}=\frac{p_0}{\sqrt{(-m\omega^2+k)^2+(c\omega)^2}}\\ \tan\theta_{yp}&=\frac{y_2}{y_1}=\frac{-c\omega p_1+(-m\omega^2+k)p_2}{(-m\omega^2+k)p_1+c\omega p_2}\end{aligned}\tag{1.28}$$

所以 $p(t)$ 及 $y_p(t)$ 應等於下列之式子為：

$$\begin{aligned}p(t)&=R_e\left[(p_1+ip_2)e^{i\omega t}\right]=p_1\cos\omega t-p_2\sin\omega t=p_0\cos\left(\omega t+\theta_p\right)\\ y_p(t)&=R_e\left[(y_1+iy_2)e^{i\omega t}\right]=y_1\cos\omega t-y_2\sin\omega t=y_0\cos\left(\omega t+\theta_{yp}\right)\end{aligned}\tag{1.29}$$

由式(1.18)及式(1.19)代入式(1.27)及式(1.28)可得：

$$y_1 = \frac{(1-\beta^2)p_1 + (2\xi\beta)p_2}{m\omega_n^2[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]}$$

$$y_2 = \frac{-(2\xi\beta)p_1 + (1-\beta^2)p_2}{m\omega_n^2[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \tag{1.30}$$

$$y_0 = \frac{p_0}{m\omega_n^2\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$tan\,\theta_{yp} = \frac{-(2\xi\beta)p_1 + (1-\beta^2)p_2}{(1-\beta^2)p_1 + (2\xi\beta)p_2} \tag{1.31}$$

上式中ω_n代表自然頻率，ξ代表阻尼比，及β代表頻率比，$\beta = \omega/\omega_n$。

如果$c = 0$，即$\xi = 0$，由式(1.13)及式(1.31)得$tan\theta_{yp} = tan\theta_p$，所以穩態簡諧反應$y_p(t)$與簡諧外力 $p(t)$之相位相同，如果阻尼很小，如$\xi \ll 0.1$，則$tan\,\theta_{yp} \doteq tan\,\theta_p$。

例題 1.1 一單自由度系統如圖 1.5 所示，其運動方程式如式(1.16)或式(1.17)所示，如簡諧外力 $p(t) = p_0\,sin\,\omega t$，試推導穩態簡諧反應 $y_p(t)$，並畫 $y_p(t)$與 $p(t)$ 之相位關係圖。

任一大小及相位之簡諧力 $p(t)$可以式(1.10)表示之，所以得$p_1 = 0$及$p_2 = -p_0$，穩態簡諧反應可由式(1.24)或(1.29)表示之，即：

$$y_p(t) = R_e\left[(y_1 + iy_2)e^{i\omega t}\right] = y_1\,cos\,\omega t - y_2\,sin\,\omega t \tag{1.32}$$

上式中y_1及y_2可由式(1.30)求得：

$$y_1 = \frac{p_0}{k}\frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\text{，}\quad y_2 = \frac{p_0}{k}\frac{-(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \tag{1.33}$$

式(1.33)代入式(1.32)得$y_p(t)$為：

$$y_p(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}[(1-\beta^2)\,sin\,\omega t-(2\xi\beta)\,cos\,\omega t] \tag{1.34}$$

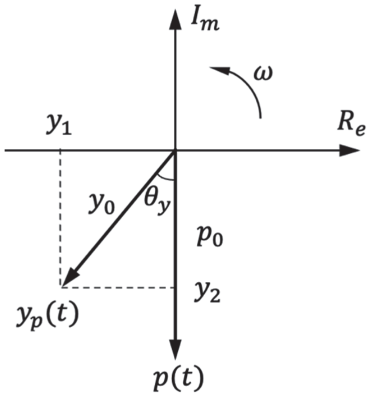
上式可改寫為：

$$y_p(t) = y_0\,sin(\omega t-\theta_y) \tag{1.35}$$

上式中y_0代表穩態簡諧反應之大小（或振幅），θ_y代表$y_p(t)$落後$p(t)$之相位角，如下式所示：

$$y_0 = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\text{，}\ tan\,\theta_y = \frac{y_1}{y_2} = \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \tag{1.36}$$

所以簡諧外力$p(t)$與穩態簡諧反應$y_p(t)$之相位關係如圖 1.7 所示：



$$p(t) = p_0\,sin\,\omega t$$
$$y_p(t) = y_0\,sin(\omega t-\theta_y)$$
$$y_0 = \frac{p_0}{k(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$
$$tan\,\theta_y = \frac{y_1}{y_2}$$

圖 1.7 穩態簡諧反應$y_p(t)$與簡諧外力$p(t)$之相位圖 $(t=0)$

例題 1.2 一單自由度系統如圖 1.5 所示，W、k、c及$p(t)$等值如下所示，試求：1. 穩態簡諧反應$y_p(t)$與外力$p(t)$之相位關係，2. 慣性力、阻尼力及彈簧力等之向量圖。

$W = 220\times103$ N　　$p(t) = p_0\,sin(\omega t+\theta_p)$

$k = 180\ \times10^3$ N/cm　　$p_0 = 4500\ \times10^3$ N

$c = 2000$ N-s/cm　　$\omega = 15$ rad/s　　$\theta_p = \pi/6$
