



你會想一窺究竟的平面擬合

趙鍵哲 / 國立臺灣大學土木工程學系測量及空間資訊組 副教授

王思涵 / 國立臺灣大學土木工程學系測量及空間資訊組 碩士生

空間資料收集技術進展神速，空間資訊已多見於生活各層面的應用。空間資料處理攸關空間資訊的品質及可靠度，本文主要針對三維點雲於平面擬合任務的處理技術及問題探討，採取的方式是例舉而非全盤討論；援引的是較一般的現象或理論，而非嚴謹及周延的的論述。我們希望藉由本文的畫龍點睛，能吸引資料處理者的幾何及平差目光，正視在平面擬合這個議題上包含函數模式及隨機模式的平差數學模式之實質意涵。

平面擬合

平面擬合為空間資料處理常碰觸的工作，尤以來自攝影測量以及雷射掃描產製的三維點雲，在執行空間特徵萃取及辨識任務時，平面擬合常是首要處理標的。來自測量載具以及施測觀測量的誤差，三維點雲之點位也承襲了這些誤差，每一個點位坐標分量均帶有相應之誤差。因此，在執行平面擬合任務時，考量這些誤差並賦予觀測量改正的擬合程序，是優化平面擬合的最常用作法，而此作法可經由平差技術達成。誤差型態可分為三類：錯誤、系統誤差以及隨機誤差（或稱偶然誤差），為聚焦以及縮小討論範疇，本文主要針對只具隨機誤差的觀測量型態進行平面擬合討論，換句話說，本課題假設錯誤觀測量已經排除以及具系統性誤差觀測量業已修正。

平差數學模式（Mathematical model）包含函數模式（Functional model）以及隨機模式（Stochastic model），前者給定觀測量對應之特定物理現象或者是觀測量、誤差以及未知參數之函數關係，後者描述觀測量誤差之統計特性^[1]。欲收良好平差成效，函數模式以及隨機模式的合理性及適當性為必要條件。那麼，如何知道函數模式以及隨機模式是否合理及適當，對執行平差工作的大眾，這常是一個大哉問，但實質上，這卻是從平差技術的推演上最基本的條件檢視。

為讓本文呈現能具單刀直入的功效，內容陳述會跳脫學術文章嚴謹的撰寫格式，並以主題式項目以及例舉式資料方式，透過幾何特性以及平差理論達到問題定位及說明之功效。以下內容包含平面方程式、平差模式、範例探討以及結論。

平面方程式及平面擬合

平面方程式可表達平面軌跡，數學上，通過不共線的三個三維點位可決定一平面，平面方程式有幾類常見表達方式，於（平面方程式）中介紹。平面擬合則為處理自一點群中找到一最適平面方程式，點群中之點位通常帶有誤差，最適擬合過程即在考量誤差下找到最佳平面。在隨機誤差條件下，最小二乘擬合估值具統計及幾何雙重優越性，是空間資料平面擬合的利器，也是本文平差處理的數學工具，詳見（最小二乘平差模式及平面擬合機制）。

平面方程式

1. 於圖 1 中，若平面通過點 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ，且其法向量為 $\vec{n} = (A, B, C)^T$ ，則平面上任一點 $P(x, y, z)$ 與 P_0 連線向量會垂直於平面法向量 $\vec{n} = (A, B, C)^T$ ，如式 (1) 所示：

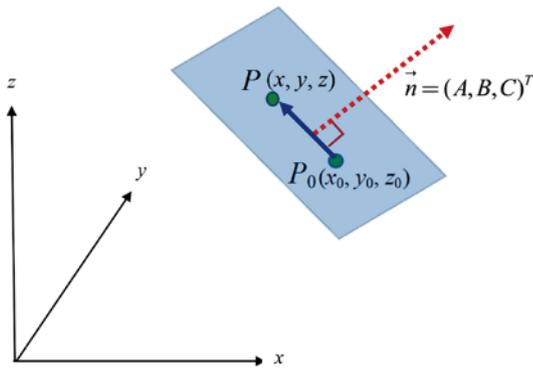


圖 1 過已知點 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 且平面法向量為 $\vec{n} = (A, B, C)^T$ 之平面

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \quad (1)$$

亦即，

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0; Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0, \text{ 可整理得式 (2):}$$

$$Ax + By + Cz = D \quad (2)$$

其中 $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$

此類平面方程式雖有四個參數 (A, B, C, D) ，但只有 A, B, C 是獨立參數，藉由已知平面上 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ，可推得 D 。

- 以式 (2) 為基礎，將某一坐標分量放置於方程式左邊，而其餘移至方程式右邊，並只保留三個獨立參數，可得 $Cz = -Ax - By + D$ ，亦即式 (3)：

$$z = \frac{-A}{C}x + \frac{-B}{C}y + \frac{D}{C} = a_1x + b_1y + c_1 \quad (3)$$

或者是

$$y = a_2x + b_2z + c_2 \quad (4)$$

$$x = a_3y + b_3z + c_3 \quad (5)$$

- 以式 (2) 類型出發，但只保留三個獨立參數，其平面方程式型態如下式：

$ax + by + cz = 1$ ，此平面方程式之法向量為 $(a, b, c)^T$ ，單位法向量則為 $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c)^T$ 。惟此類方程式無法表達通過 $(0, 0, 0)$ 之平面。

最小二乘平差模式及平面擬合機制

針對平面特徵點雲之平面擬合任務，可採（平面方程式）三類方程式（函數模式）擇一進行，但使

用最少數量參數型態的平面方程式是操作上最為方便選項；再者，考量慣用之間接觀測及廣義平差模式，第二類型態平面方程式滿足上述方便性及施作條件。以下分別介紹間接觀測以及廣義平差兩類模式^[2,3]，同時，也例舉合理隨機模式之重要性以及說明最小二乘平面擬合機制。

(1) 間接觀測平差

間接觀測（Indirect observation; Observation equation）平差模式亦稱為 Gauss-Markov Model（GMM），其數學模式如式 (6)：

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \sim (0, \Sigma = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}) \quad (6)$$

其中： \mathbf{y} 為觀測量向量； \mathbf{e} 為誤差向量； \mathbf{A} 為未知參數係數矩陣； $\boldsymbol{\xi}$ 為未知參數向量； n 為方程式個數； m 為未知參數個數； Σ 為觀測量方差-協方差矩陣； \mathbf{P} 為權矩陣； σ_0^2 為先驗單位權方差

上式左側為函數模式，有其對應之方程式（例如平面方程式： $z = a_1x + b_1y + c_1$ ）；右側則描述觀測量誤差一階（平均值）以及二階（方差-協方差）統計量，即隨機模式。

最小二乘解：

$$\text{參數估值向量：} \hat{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{y};$$

$$\text{改正數向量：} \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{y} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{y} = [\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}] \mathbf{y};$$

$$\text{後驗單位權方差：} \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{e}}}{n - m} \quad (\text{當 rank}(\mathbf{A}) = m);$$

$$\text{先驗參數估值方差-協方差矩陣：} \Sigma_{\hat{\boldsymbol{\xi}}} = \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1};$$

$$\text{後驗參數估值方差-協方差矩陣：} \hat{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{\xi}}} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1};$$

另外，從改正數向量推演：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}} &= [\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}] \mathbf{y} \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}] (\mathbf{A} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}) \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}] \mathbf{e} \\ &= \mathbf{R} \mathbf{e} \\ &= \mathbf{R} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (7)$$

\mathbf{R} 為投影矩陣（Projection matrix, $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}$ ），將誤差向量投影而得改正數向量。

\mathbf{R} 亦稱為多餘觀測矩陣（Redundancy matrix）， $\text{Trace}(\mathbf{R}) = r_{11} + r_{22} + \dots + r_{mm} = n - m =$ 多餘觀測數（Redundancy），矩陣內元素數值介於正負 1 之間。 \mathbf{R}

對角線上的每一元素稱為所對應觀測量的局部多餘觀測數 (Redundancy numbers) [4]，這個數字代表在改正數上其反映自身觀測量誤差的比例。每一個改正數除了受自身觀測量誤差影響外，也受到其它觀測量誤差之左右。整體而言， R 矩陣提供最小二乘法之改正數與誤差之配賦關係，行 (Column) 元素決定個別誤差對所有改正數之影響，列 (Row) 元素決定所有誤差對相應改正數之影響，參如式 (8)。

$$\tilde{e} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \vdots \\ \tilde{e}_n \end{pmatrix} = R\mathbf{e} = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \cdots & r_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \cdots & r_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = R\mathbf{y} = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \cdots & r_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \cdots & r_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中：

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= r_{1,1}e_1 + r_{1,2}e_2 + r_{1,3}e_3 + \cdots + r_{1,n}e_n = r_{1,1}y_1 + r_{1,2}y_2 + r_{1,3}y_3 + \cdots + r_{1,n}y_n \\ \tilde{e}_2 &= r_{2,1}e_1 + r_{2,2}e_2 + r_{2,3}e_3 + \cdots + r_{2,n}e_n = r_{2,1}y_1 + r_{2,2}y_2 + r_{2,3}y_3 + \cdots + r_{2,n}y_n \\ &\vdots \\ \tilde{e}_n &= r_{n,1}e_1 + r_{n,2}e_2 + r_{n,3}e_3 + \cdots + r_{n,n}e_n = r_{n,1}y_1 + r_{n,2}y_2 + r_{n,3}y_3 + \cdots + r_{n,n}y_n \end{aligned}$$

如式 (6) 所示，間接觀測方程式乃 (一個) 觀測量是未知參數的函數。因此，採用間接觀測平差進行平面擬合，點位坐標改正量只會產生在所指定的觀測量上，以 $z = a_1x + b_1y + c_1$ 平面方程式型態而言，只有 z (觀測量) 才有改正數，即便 x 與 y 分量亦有誤差，但在此平差模式下，並無進行改正。

(2) 廣義平差法 (Generalized adjustment)

廣義平差模式又稱為 Gauss-Helmert Model (GHM)，除此之外，由於型態 (參式 (9)) 包含條件觀測及未知參數，因此也稱為帶有未知參數之條件觀測 (Condition equations with unknown parameters)。相較於間接觀測平差模式，廣義平差模式其方程式可納入多個觀測量，針對平面方程式 $z = a_1x + b_1y + c_1$ 而言， x, y 及 z 分量都可進行改正。廣義平差數學模式如式 (9)：

$$\mathbf{w} = B\mathbf{y} = A\xi + B\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \sim (0, \Sigma = \sigma_0^2 P^{-1}) \quad (9)$$

其中： \mathbf{w} 為不符值向量； \mathbf{y} 為觀測量向量； \mathbf{e} 為誤差向量； A 為未知參數係數矩陣； B 為觀測量係數矩陣； ξ 為未知參數向量； n 為觀測量個數； m 為未知參數個數； r 為方程式個數； Σ 為觀測量方差 - 協方差矩陣； P 為權矩陣； σ_0^2 為先驗單位權方差

最小二乘解：

$$\hat{\xi} = [A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}A]^{-1}A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}\mathbf{w}$$

改正數向量：

$$\tilde{e} = P^{-1}B^T(BP^{-1}B^T)^{-1}\{I - A[A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}A]^{-1}A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}\}\mathbf{w}$$

$$\text{後驗單位權方差：}\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\tilde{e}^T P \tilde{e}}{r}$$

$$\text{先驗參數估值方差 - 協方差矩陣：}\Sigma_{\hat{\xi}} = \sigma_0^2 [A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}A]^{-1}$$

$$\text{後驗參數估值方差 - 協方差矩陣：}\hat{\Sigma}_{\hat{\xi}} = \hat{\sigma}_0^2 [A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}A]^{-1}$$

多餘觀測矩陣：

$$R = P^{-1}B^T(BP^{-1}B^T)^{-1}\{I - A[A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}A]^{-1}A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}\}B$$

投影矩陣可以分成以下兩類：

1. 原觀測量誤差之投影矩陣：

$$\begin{aligned} \tilde{e} &= P^{-1}B^T(BP^{-1}B^T)^{-1}\{I - A[A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}A]^{-1}A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}\}\mathbf{w} \\ &= P^{-1}B^T(BP^{-1}B^T)^{-1}\{I - A[A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}A]^{-1}A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}\}B\mathbf{e} \\ &= R\mathbf{e} \end{aligned}$$

2. 符合 Gauss-Markov Model 之投影矩陣：

原廣義平差模式可經由以下變換，轉換為 Gauss-Markov Model，參數解不變 (式 (11))，對應之改正數向量會有改變 (式 (12))：

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= B\mathbf{y} = A\xi + B\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \sim (0, \Sigma = \sigma_0^2 P^{-1}) \\ \text{令 } B\mathbf{y} &= \bar{\mathbf{y}}, \text{ 則} \\ \bar{\mathbf{y}} &= A\xi + \bar{\mathbf{e}}, \quad \bar{\mathbf{e}} = B\mathbf{e} \sim (0, \bar{\Sigma} = \sigma_0^2 BP^{-1}B^T) \end{aligned} \quad (10)$$

最小二乘解：

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &= [A(BP^{-1}B^T)^{-1}A^T]^{-1}A(BP^{-1}B^T)^{-1}\bar{\mathbf{y}} \\ &= [A(BP^{-1}B^T)^{-1}A^T]^{-1}A(BP^{-1}B^T)^{-1}\mathbf{w} \end{aligned} \quad (11)$$

而

$$\begin{aligned} \tilde{e} &= B\tilde{e} = \{I - A[A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}A]^{-1}A^T(BP^{-1}B^T)^{-1}\}\bar{\mathbf{e}} \\ &= R\bar{\mathbf{e}} \end{aligned} \quad (12)$$

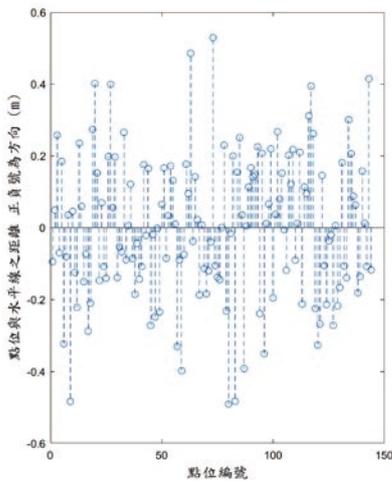
(3) 隨機特性

數學模式的正確性架構在函數模式及隨機模式都得正確之條件上，函數模式來自於所對應之物理條件及幾何關係，有其對應之數學方程式，例如直線方程式及平面方程式等。相對而言，隨機模式則描述所收集或觀測的資料誤差，而最小二乘法是在誤差具隨機特性的假設條件下運作，誤差給定是否合理以及是否富隨機特性，在在影響平差解算成效及成果評估。

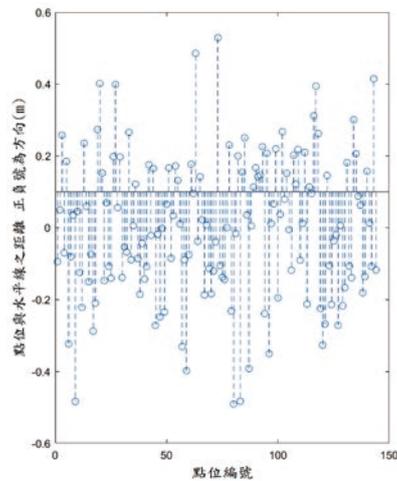
以圖 2(a) 為例，假設真值為通過 $y = 0$ m 的水平線，針對此水平線進行測量，圓圈點為所觀測點位，圖中虛線為測點到水平線的距離，這些點位是否屬於隨機，我們可觀察點位在此水平線上下的分布具有類似的數值範圍，也就是誤差具大小及符號之隨機性（參圖 3(a)），以這些點位來進行直線擬合，其直線最或是值應相當接近於真值。反觀圖 3(b)，使用相同的測點資料，但上移基準線至 $y = 0.1$ m 的水平線，如同假設真值為通過 $y = 0.1$ m 的水平線，則觀測點位分布呈

現系統性的偏移，直線下方的點位誤差量較大，使得經最小二乘擬合的直線無法接近位於 $y = 0.1$ m 之水平線，而會向下移動並擬合到 $y = 0$ m 的水平線。

再來看圖 4，很類似於圖 2(b)，不過，在點位分布上，上下點位對稱，因此符號具隨機性，但是直線上方點位的離散度較下方來得大，意謂下方點位精密度（precision）較上方點位為高，倘若不明就裡，以上下點位同等誤差來進行最小二乘擬合，則所擬合之直線最或是值會往 $y = 0$ m 上方偏移。

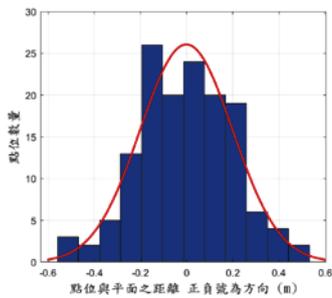


(a) 直線兩側呈隨機

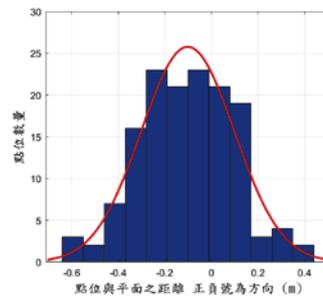


(b) 直線下方誤差大於上方誤差

圖 2 直線觀測量分布



(a) 圖 2(a) 之直方圖



(b) 圖 2(b) 之直方圖

圖 3 展示圖 2 誤差直方圖

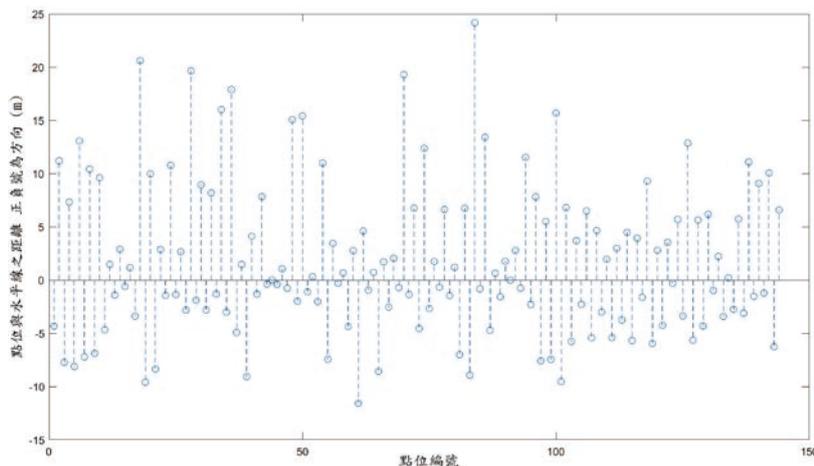


圖 4 直線觀測量分布

(4) 最小二乘平面擬合機制

最小二乘法是在使得改正數平方總和最小的狀態下獲得參數解，當考量品質不等之觀測量，則以改正數平方加權總和最小之加權最小二乘法 (Weighted least-squares method) 施作。針對以 $z = a_1x + b_1y + c_1$ 平面擬合而言，考量點位誤差之方程式為 $z - e_z = a_1(x - e_x) + b_1(y - e_y) + c_1$ ，可整理如式 (13)。倘施以間接觀測平差模式，點位沿著 z 分量進行改正 (圖 5 藍色虛線)；而廣義平差則點位沿著平面法線方向改正 (圖 5 藍色實線)。因此，兩類平差模式所改正的成分及方向是不同的。

$$z - e_z + (a_1e_x + b_1e_y) = a_1x + b_1y + c_1 \quad (13)$$

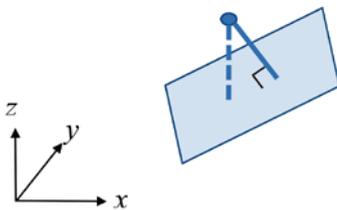


圖 5 平面擬合不同平差模式之點位改正方向

(5) 從投影矩陣解讀改正數與誤差關係

於「(1) 間接觀測平差」所介紹之多餘觀測矩陣 (R) 亦扮演投影矩陣角色，描述誤差向量 (e) 與改正數向量 (\bar{e}) 之投影幾何關係 ($\bar{e} = Re$)，當 $R^2 = R = R^*$ (“*” 為對矩陣元素取共軛複數並轉置，若為實數矩陣，則 $R^2 = R = R^T$)，則此類投影矩陣為正交投影矩陣 (Orthogonal projection matrix) [5]，投影矩陣沿著與改正數向量空間垂直方向進行投影，此時改正數向量長度 ($\sqrt{\bar{e}^T \bar{e}}$) 不大於誤差向量長度 ($\sqrt{e^T e}$)，也就是 $\|\bar{e}\| \leq \|e\|$ ；若投影矩陣不具正交特性，屬於斜投影，稱為斜投影矩陣 (Oblique projection matrix)，則改正數向量長度不一定會短於誤差向量長度 (如圖 6 紅色虛線對應於綠色實線之投影長度)。本文兩類平差模式，間接觀測平差之投影矩陣屬於正交投影矩陣；而一般而言，廣義平差模式不具正交投影特性，但經轉換為間接觀測平差模式後的投影矩陣仍具正交性，不過此時的改正數向量為 $B\bar{e}$ ，而非 \bar{e} (參式 (12))。

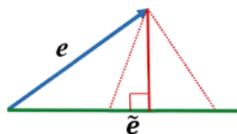


圖 6 由投影矩陣產生之改正數
(註：此圖已將投影空間簡化成僅展示長度之投影效果)

(6) 平面擬合成果評估

平差後之後驗單位權標準差及參數標準差雖是平差成果指標，但這一類理論精度指標並無法提供直觀的品質優劣比較；在有真值平面的情況下，可比較真值平面與擬合平面之距離 (式 (14))，藉由擬合平面與真值平面處處的相近程度可提供有效擬合成果量化指標，本文採距離總和做為不同平差模式擬合成果之比較指標。另外，也計算擬合平面與真值平面之夾角 (式 (15)) 作為輔助指標。

$$d_i = \frac{|z_i - a_1x_i - b_1y_i - c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + 1}} \quad (14)$$

其中：

d_i ：真值平面點位 i 至擬合平面之最短距離；

(x_i, y_i, z_i) ：真值平面點位 i 坐標

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} \quad (15)$$

其中：

θ ：擬合平面與真值平面之夾角；

\vec{n}_1, \vec{n}_2 ：分別為擬合平面與真值平面之法向量

平面擬合事例分析

平面資料模擬

事例分析之兩平面 (圖 7) 之模擬如下：

1. 平面 1： $z = 100$ m， x 及 y 均從 -6 m ~ 5 m，每間隔 1 m 布設 1 個格點，形成 12×12 之格點，此 144 個點位實位於 $z = 100$ m 的平面上。
2. 平面 2：將平面 1 點位進行 $\omega = 70^\circ$ (第一旋轉)、 $\phi = 40^\circ$ (第二旋轉) 以及 $\kappa = 45^\circ$ (第三旋轉) 之旋轉，相應之平面方程式為 $z = -1.943x - 3.129y + 381.676$ ，單位法向量 = $(0.509, 0.820, 0.262)^T$ ，平面方程式及單位法向量單位均為 m。

平面擬合成果及分析

本實驗包含前述兩模擬平面 (平面 1 及平面 2) 及不同型態誤差之授予與平差處理，詳 (1) ~ (3) 節。

(1) 模擬平面 1 點位誤差及進行平面擬合

以平面 1 之 144 個格點坐標為真值，並模擬空載光達掃描產製點雲， x 及 y 坐標標準差均為 ± 0.150 m， z 坐標標準差為 ± 0.050 m，三分量誤差呈隨機特性，其直方圖參見圖 8，點位至真值平面距離圖及直方圖分別

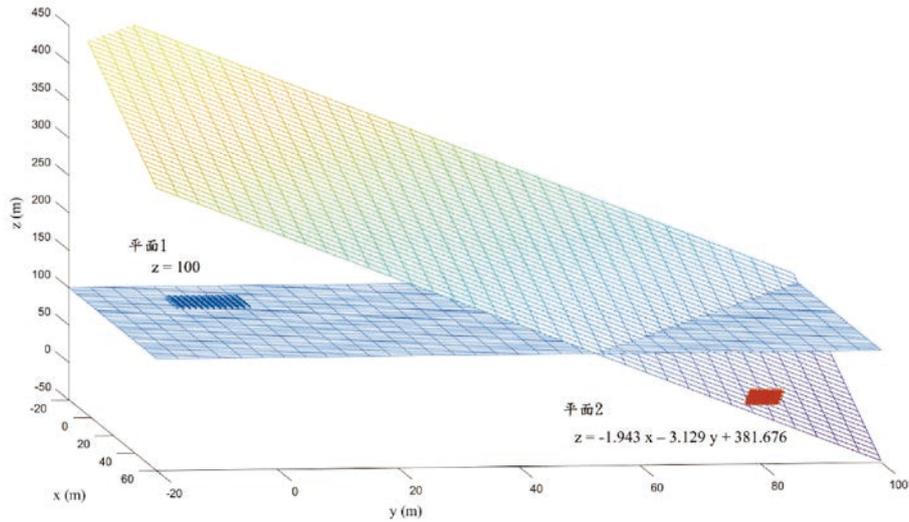


圖 7 平面 1 及平面 2

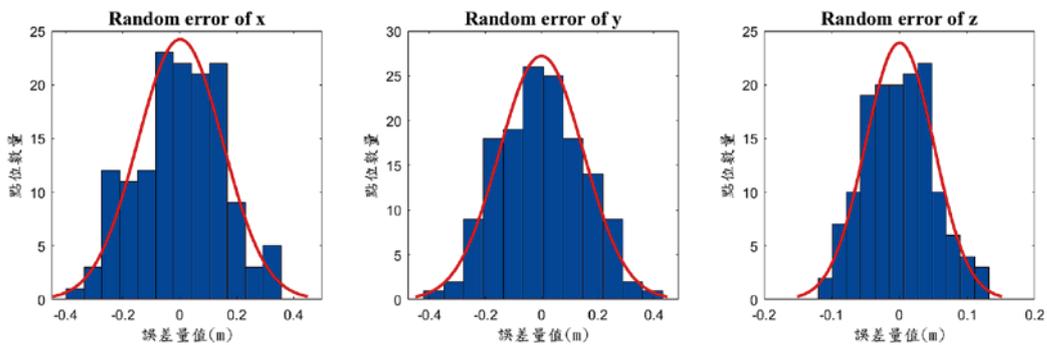


圖 8 誤差直方圖

參見圖 9(a) 及圖 9(b)。將此誤差量加入格點坐標真值中作為觀測量，並分別以間接觀測平差及廣義平差進行 $z = a_1x + b_1y + c_1$ 之平面擬合。

表 1 顯示兩模式擬合成果相近，擬合平面相對於真值平面參見圖 10。依平面幾何而言，此平面為水平面，平面法線向量之 x 及 y 分量均為 0，意謂間接觀測進行 z 改正，而廣義平差也是進行 z 分量改正，無 x 及 y 的改正量。觀察廣義平差的 R 矩陣（表 2），其顯示

與 x 及 y 改正數對應之多餘觀測矩陣元素數值上均很小，改正數接近於 0。在此平面幾何下，間接觀測平差模式與廣義平差模式具等義效果。在此特殊幾何條件下，兩類平差模式同具正交投影矩陣，由圖 11 及圖 12 中顯示改正數向量長度短於誤差向量長度。

另外，雖然本例在兩模式下獲得相同的平差成果，不過，當函數模式之平面方程式選為 $y = a_2x + b_2z + c_2$ 或者是 $x = a_3y + b_3z + c_3$ 時，廣義平差仍能順利獲致平

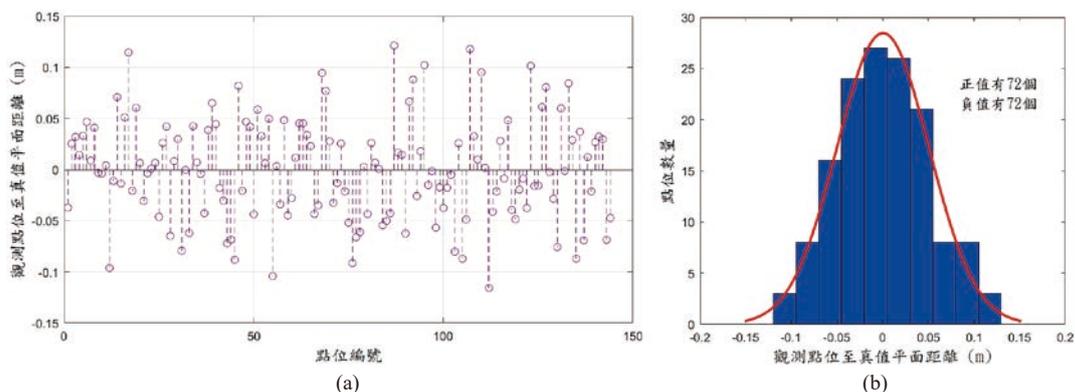


圖 9 觀測點位至真值 (a) 平面距離及 (b) 直方圖

表 1 間接觀測平差 vs. 廣義平差之平面擬合成果

(長度單位：m；角度單位：度)

隨機誤差	$\sigma_x = \sigma_y = \pm 0.15; \sigma_z = \pm 0.05$	
真值平面方程式	$z = 0.000x + 0.000y + 100.000$	
平差模式	間接觀測平差	廣義平差
參數估值	$a_1 = -0.001 \pm 0.001;$ $b_1 = 0.001 \pm 0.001;$ $c_1 = 100.000 \pm 0.004$	$a_1 = -0.001 \pm 0.001;$ $b_1 = 0.001 \pm 0.001;$ $c_1 = 100.000 \pm 0.004$
擬合平面方程式	$z = -0.001x + 0.001y + 100.000$	$z = -0.001x + 0.001y + 100.000$
先驗單位權標準差	± 0.218	± 0.218
後驗單位權標準差	± 0.221	± 0.221
真值格點到擬合平面距離和	0.551	0.551
真值平面與擬合平面夾角	0.077	0.077
誤差向量 (e) 長度	0.603	2.599
改正數向量 (\bar{e}) 長度	0.601	0.601
誤差向量 (B_e) 長度		0.603
改正數向量 ($B\bar{e}$) 長度		0.601

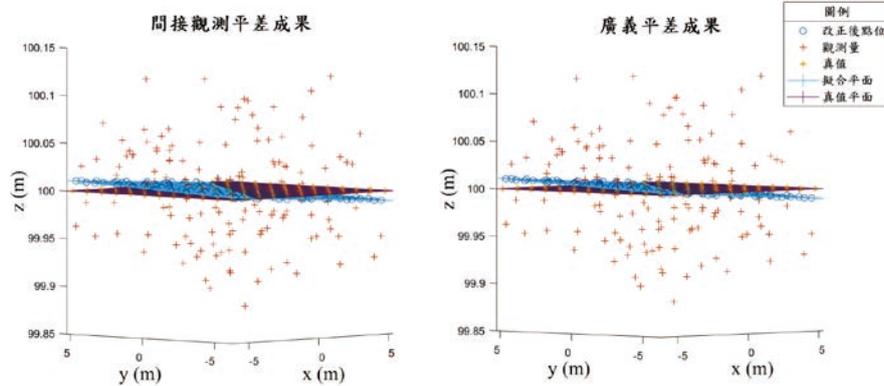


圖 10 擬合平面相對於真值平面

表 2 R 矩陣部分內容 ($r_{1,1} \sim r_{9,9}$)

1.01E-05	-7.44E-06	0.009314	-4.16E-07	3.08E-07	-0.000386	-3.81E-07	2.82E-07	-0.000353
-7.44E-06	5.51E-06	-0.006894	3.08E-07	-2.28E-07	0.000285	2.82E-07	-2.09E-07	0.000261
0.001035	-0.000766	0.958999	-4.29E-05	3.17E-05	-0.039715	-3.92E-05	2.90E-05	-0.036326
-4.16E-07	3.08E-07	-0.000386	1.01E-05	-7.46E-06	0.009336	-3.75E-07	2.78E-07	-0.000348
3.08E-07	-2.28E-07	0.000285	-7.46E-06	5.52E-06	-0.006910	2.78E-07	-2.05E-07	0.000257
-4.29E-05	3.17E-05	-0.039715	0.001037	-0.000768	0.961231	-3.86E-05	2.86E-05	-0.035788
-3.81E-07	2.82E-07	-0.000353	-3.75E-07	2.78E-07	-0.000348	1.01E-05	-7.50E-06	0.009387
2.82E-07	-2.09E-07	0.000261	2.78E-07	-2.05E-07	0.000257	-7.50E-06	5.55E-06	-0.006947
-3.92E-05	2.90E-05	-0.036326	-3.86E-05	2.86E-05	-0.035788	0.001043	-0.000772	0.966482

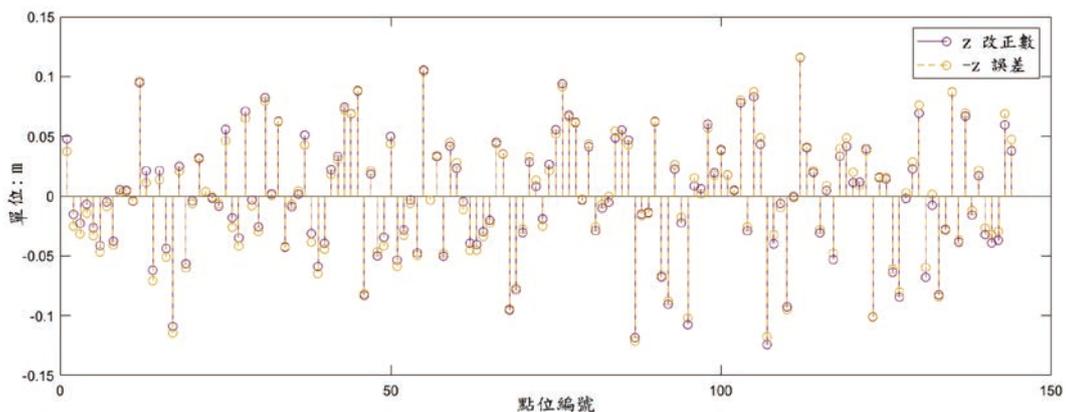


圖 11 間接觀測平差改正數 vs. 誤差

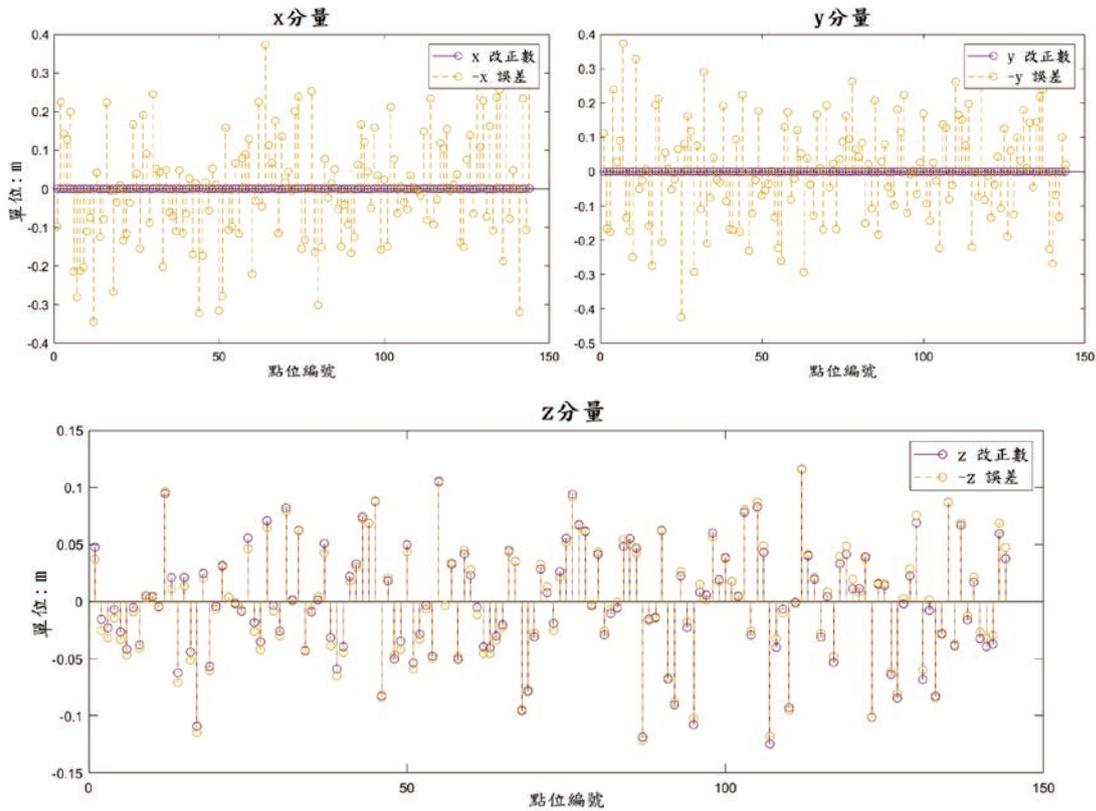


圖 12 廣義平差改正數 vs. 誤差

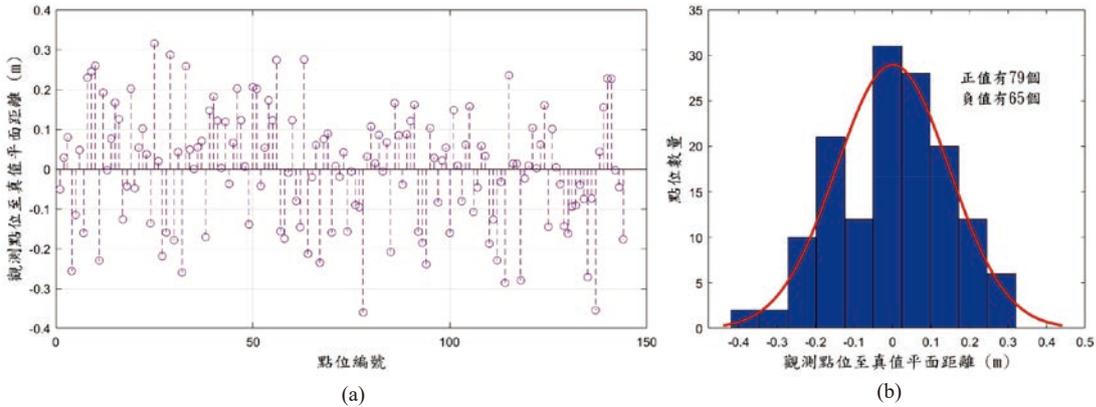


圖 13 觀測點位至真值 (a) 平面距離及 (b) 直方圖

面擬合平差成果，而間接觀測模式則因 x 及 y 分量不具改正效力（亦即可為任意數），無法進行平面擬合任務。同樣地，當平面接近鉛錘狀態，以 $z = a_1x + b_1y + c_1$ 進行間接觀測平面擬合亦容易產生錯誤結果或失敗。因此，就適用性而言，廣義平差是較佳的平差模式。

(2) 模擬平面 2 點位誤差 (case1) 及進行平面擬合

首先，將「(1) 模擬平面 1 點位誤差及進行平面擬合」模擬之誤差量值授予平面 2 點位，觀測點位至真值平面距離及直方圖分別參圖 13(a) 及 (b)，兩模式平差成果參見表 3，成果顯示廣義平差成果優於間接觀測

平差。然而，從距離直方圖可見觀測點位相對於真值平面而言並未呈現隨機特性，較多點位（79 個點）分布於距離值為正之平面一側。就隨機模式而言，真正滿足隨機特性的平面並非真值平面 2，而是真值平面 2 應稍往距離值為正方向移動者。因此，對帶有系統性偏移的觀測量，倘直接進行最小二乘平差，其成果亦帶有偏移性，評估上尤需小心。

另外，就模式合理性而言，平面 2 之單位法向量為 $(0.509, 0.820, 0.262)^T$ ，間接觀測平差只賦予 z 分量改正數，並未修正 x 及 y 誤差， x 及 y 誤差引致之方程式不符

表 3 平面 2 (case1) 間接觀測平差 vs. 廣義平差之平面擬合成果

(長度單位：m；角度單位：度)

隨機誤差	$\sigma_x = \sigma_y = \pm 0.150; \sigma_z = \pm 0.050$	
真值平面方程式	$z = -1.943x - 3.129y + 381.676$	
平差模式	間接觀測平差	廣義平差
參數估值	$a_1 = -1.840 \pm 0.027;$ $b_1 = 0.0013.008 \pm 0.042;$ $c_1 = 366.469 \pm 4.638$	$a_1 = -1.888 \pm 0.028;$ $b_1 = -3.086 \pm 0.043;$ $c_1 = 375.306 \pm 4.758$
擬合平面方程式	$z = -1.840x - 3.008y + 366.469$	$z = -1.888x - 3.086y + 375.306$
先驗單位權標準差	± 0.218	± 0.218
後驗單位權標準差	± 2.342	± 0.218
真值格點到擬合平面距離和	5.533	3.371
真值平面與擬合平面夾角	0.741	0.451
誤差向量 (e) 長度	0.603	2.599
改正數向量 (\bar{e}) 長度	6.380	1.772
誤差向量 (Be) 長度		6.578
改正數向量 ($B\bar{e}$) 長度		6.461

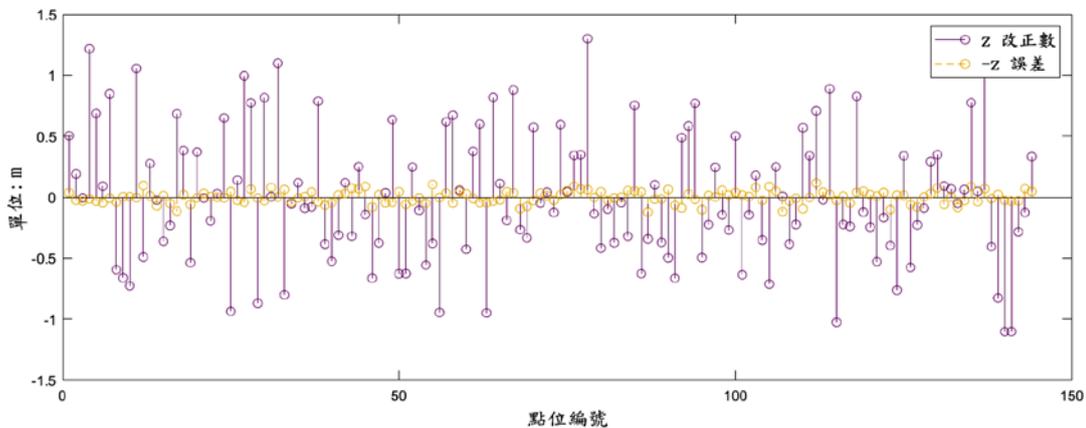


圖 14 間接觀測平差改正數 vs. 誤差

值(式(13))中之 $(a_1e_x + b_1e_y)$ 轉由 z 改正量吸收。雖然 R 矩陣為正交投影矩陣，不過，所對應之誤差實已包含 z 誤差以及對 x 及 y 之誤差補償，並非純然之 z 誤差。換句話說，此時 $\bar{e} = Ry \neq Re$ ，造成在平面擬合任務上， z 的改正數量值遠大於 z 誤差(圖14)。此外， z 的改正功效實難全然補償 x 及 y 分量之誤差，此模式上的扭曲影響參數估值，後驗單位權標準差偏大，也造成改正數向量長度大於誤差向量長度(參表3)；而觀察圖15廣義平差之改正數狀況，在 y 分量具有較大之修正量，符合此平面法向量的分量特性(y 分量最大； x 分量次之； z 分量最小)。

(3) 模擬平面 2 點位誤差 (case2) 及進行平面擬合

為了使得觀測點位具有隨機性，遂沿著平面 2 法線方向授予誤差，並以三類不同向量長度標準差量值(± 0.100 m、 ± 0.200 m 及 ± 0.300 m) 給定法向量誤差值，點位至真值平面直方圖參見圖 16，兩平差模式成果參見表 4。

從表 4 可歸納以下兩點：

1. 點位改正量分析

就改正數之量值比較，間接觀測只修正 z 分量，此改正之 z 分量不但包含 z 誤差，同時也隱含對 x 及 y 分量誤差之補償，顯示 z 改正數量值大於 z 誤差(圖17、圖19及21)。在僅考量改正 z 觀測誤差之平差模式下，隨機模式不合理，後驗單位權標準差偏大；相對而言，廣義平差模式依最小二乘原則沿著平面法線方向配賦改正數，於 y 分量(法線最大分量)呈現最大之改正數(圖18、圖20及圖22)，此趨勢亦可從多餘觀測矩陣獲知，在 y 誤差對應之多餘矩陣元素有較大之局部多餘觀測數值(表5、表6及表7中藍色數值)。另外就改正數向量與誤差向量長度之相較下，此例廣義平差的斜投影矩陣讓改正數向量長度長於誤差向量長度，不過，推演至間接觀測模式下的改正數向量($B\bar{e}$)長度是短於誤差向量(Be)長度的。

2. 兩平差模式成果分析

就間接觀測與廣義平差模式成果而言，從距離指標上，後者較前者有較佳的擬合成果。除此之外，當隨機誤差增大，則前述兩類平差模式成果差異會越大。

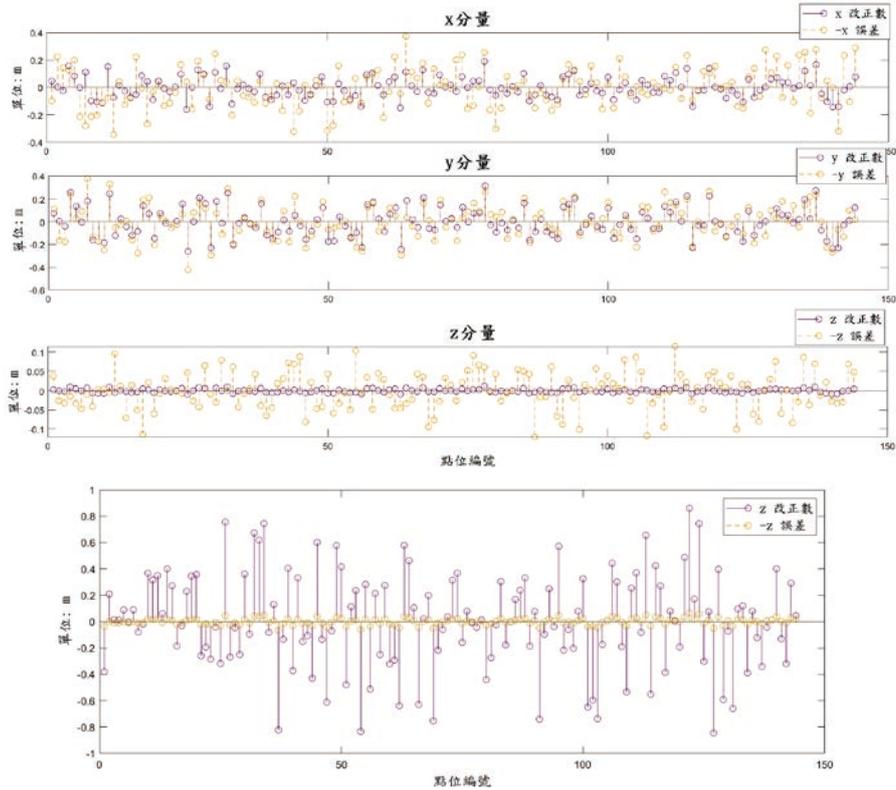


圖 15 廣義平差改正數 vs. 誤差

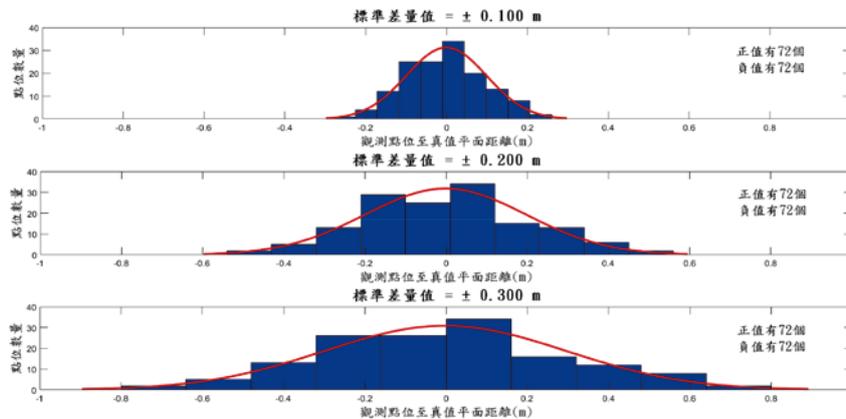


圖 16 三類標準差 (±0.100 m、±0.200 m 及 ±0.300 m) 之距離直方圖

表 4 平面 2 (case2) 間接觀測平差 vs. 廣義平差之平面擬合成果

(長度單位:m; 角度單位:度)

真值平面方程式	$z = -1.943x - 3.129y + 381.676$	
法線向量長度標準差	$\pm 0.100 / \pm 0.200 / \pm 0.300$	
平差模式	間接觀測平差	廣義平差
擬合平面方程式	$z = -1.887x - 3.056y + 372.822 /$ $z = -1.796x - 2.922y + 357.206 /$ $z = -1.678x - 2.745y + 336.731$	$z = -1.910x - 3.094y + 377.048 /$ $z = -1.878x - 3.064y + 373.041 /$ $z = -1.848x - 3.041y + 369.615$
先驗單位權標準差	$\pm 0.100 / \pm 0.200 / \pm 0.300$	$\pm 0.100 / \pm 0.200 / \pm 0.300$
後驗單位權標準差	$\pm 1.416 / \pm 2.754 / \pm 3.985$	$\pm 0.137 / \pm 0.273 / \pm 0.410$
真值格點到擬合平面距離和	2.863 / 7.945 / 15.210	1.783 / 3.600 / 5.462
真值平面與擬合平面夾角	0.390 / 1.095 / 2.109	0.237 / 0.477 / 0.726
誤差向量 (e) 長度	0.311 / 0.622 / 0.933	1.188 / 2.376 / 3.564
改正數向量 (\hat{e}) 長度	4.404 / 8.567 / 12.399	1.273 / 2.546 / 3.820
誤差向量 (B_e) 長度		4.477 / 8.860 / 13.168
改正數向量 ($B\hat{e}$) 長度		4.430 / 8.769 / 13.038

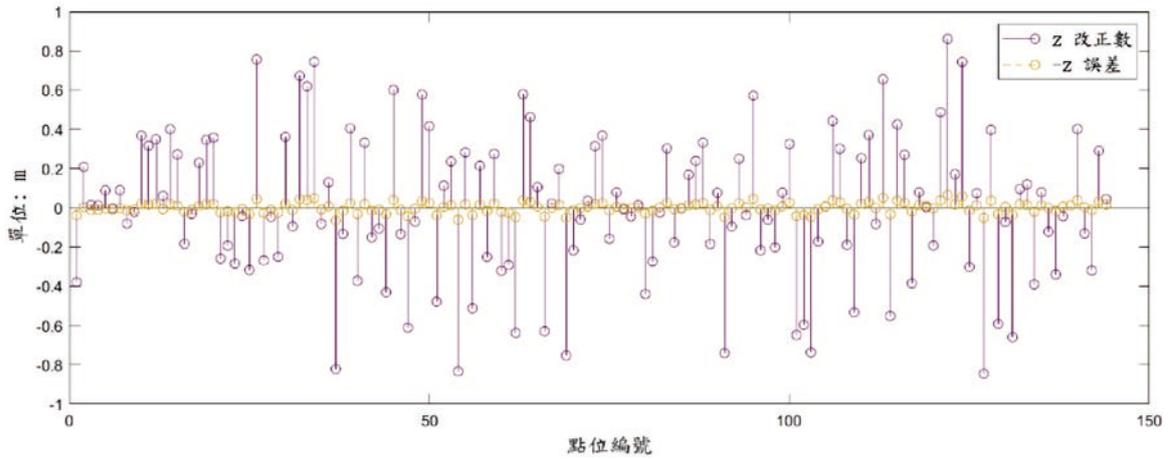


圖 17 間接觀測平差 (向量長度標準差 = ± 0.100 m) 改正數 vs. 誤差

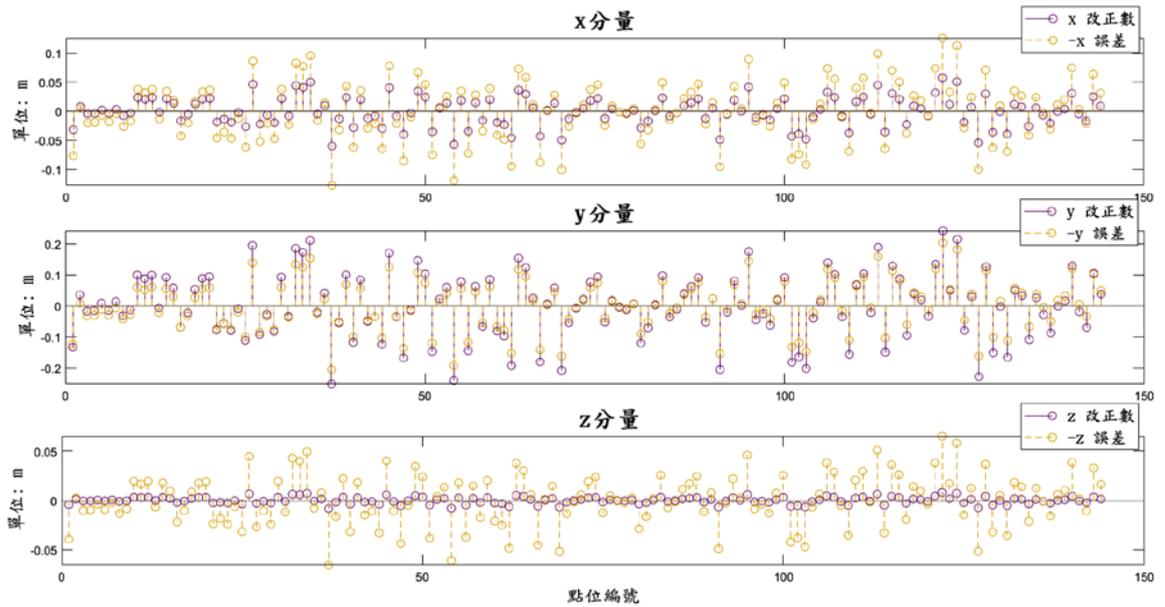


圖 18 廣義平差 (向量長度標準差 = ± 0.100 m) 改正數 vs. 誤差

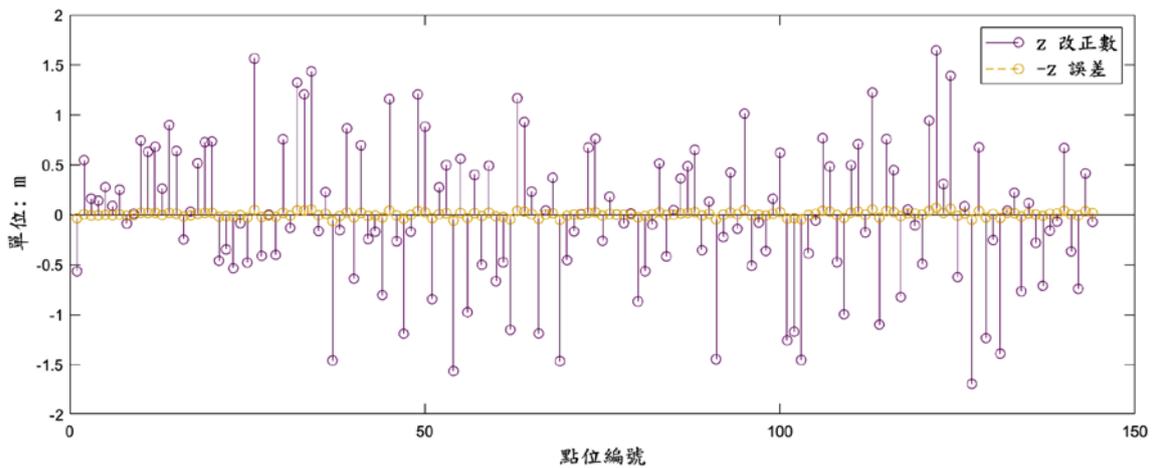


圖 19 間接觀測平差 (向量長度標準差 = ± 0.200 m) 改正數 vs. 誤差

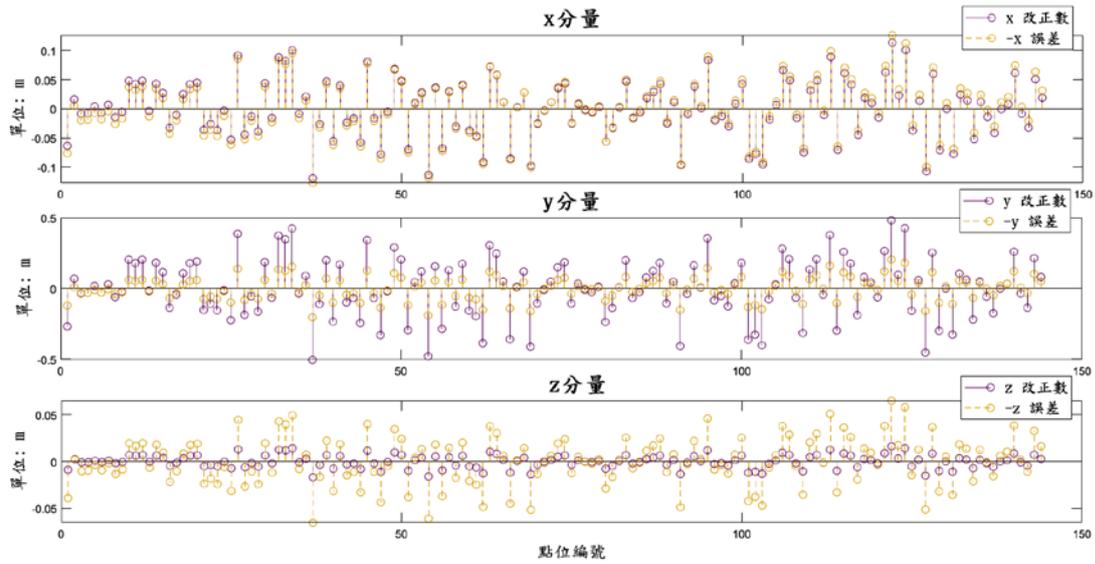


圖 20 廣義平差 (向量長度標準差 = ± 0.200 m) 改正數 vs. 誤差

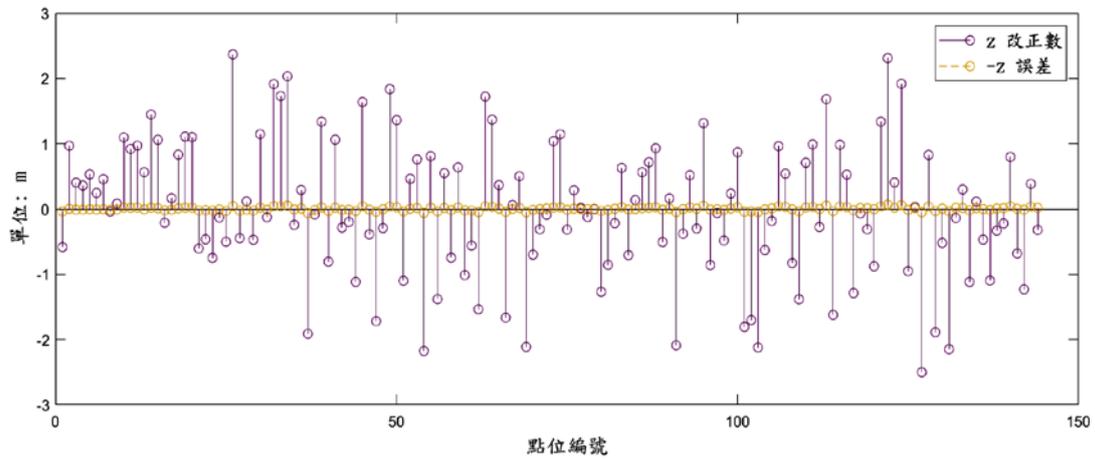


圖 21 間接觀測平差 (向量長度標準差 = ± 0.300 m) 改正數 vs. 誤差

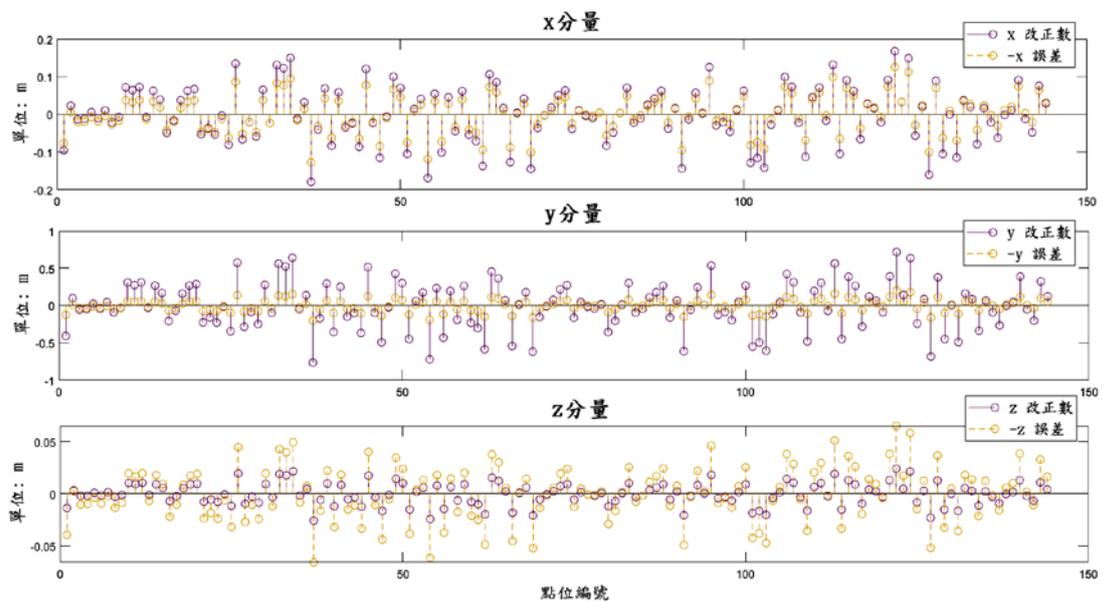


圖 22 廣義平差 (向量長度標準差 = ± 0.300 m) 改正數 vs. 誤差

表 5 廣義平差 (向量長度標準差 = ±0.100 m) R 矩陣部分內容 ($r_{1,1} \sim r_{9,9}$)

0.121551	0.196911	0.063662	-0.00494	-0.008	-0.00259	-0.00453	-0.00733	-0.00237
0.51093	0.827701	0.267598	-0.02076	-0.03362	-0.01087	-0.01903	-0.03083	-0.00997
0.016867	0.027325	0.008834	-0.00069	-0.00111	-0.00036	-0.00063	-0.00102	-0.00033
-0.00494	-0.008	-0.00259	0.122246	0.198037	0.064026	-0.00428	-0.00694	-0.00224
-0.02076	-0.03362	-0.01087	0.513851	0.832433	0.269128	-0.018	-0.02917	-0.00943
-0.00069	-0.00111	-0.00036	0.016964	0.027481	0.008885	-0.00059	-0.00096	-0.00031
-0.00453	-0.00733	-0.00237	-0.00428	-0.00694	-0.00224	0.122848	0.199012	0.064341
-0.01903	-0.03083	-0.00997	-0.018	-0.02917	-0.00943	0.516382	0.836533	0.270453
-0.00063	-0.00102	-0.00033	-0.00059	-0.00096	-0.00031	0.017047	0.027616	0.008928

表 6 廣義平差 (向量長度標準差 = ±0.200 m) R 矩陣部分內容 ($r_{1,1} \sim r_{9,9}$)

0.120085	0.195906	0.063938	-0.00487	-0.00794	-0.00259	-0.00446	-0.00727	-0.00237
0.508321	0.829268	0.270648	-0.0206	-0.03361	-0.01097	-0.01887	-0.03079	-0.01005
0.01694	0.027636	0.00902	-0.00069	-0.00112	-0.00037	-0.00063	-0.00103	-0.00033
-0.00487	-0.00794	-0.00259	0.120728	0.196954	0.06428	-0.00423	-0.0069	-0.00225
-0.0206	-0.03361	-0.01097	0.511042	0.833707	0.272096	-0.01791	-0.02922	-0.00954
-0.00069	-0.00112	-0.00037	0.017031	0.027784	0.009068	-0.0006	-0.00097	-0.00032
-0.00446	-0.00727	-0.00237	-0.00423	-0.0069	-0.00225	0.121333	0.197941	0.064602
-0.01887	-0.03079	-0.01005	-0.01791	-0.02922	-0.00954	0.513603	0.837885	0.27346
-0.00063	-0.00103	-0.00033	-0.0006	-0.00097	-0.00032	0.017116	0.027923	0.009113

表 7 廣義平差 (向量長度標準差 = ±0.300 m) R 矩陣部分內容 ($r_{1,1} \sim r_{9,9}$)

0.118356	0.194707	0.064033	-0.00479	-0.00787	-0.00259	-0.00438	-0.00721	-0.00237
0.505212	0.831125	0.273332	-0.02043	-0.0336	-0.01105	-0.0187	-0.03076	-0.01012
0.016966	0.02791	0.009179	-0.00069	-0.00113	-0.00037	-0.00063	-0.00103	-0.00034
-0.00479	-0.00787	-0.00259	0.118947	0.195679	0.064353	-0.00417	-0.00686	-0.00226
-0.02043	-0.0336	-0.01105	0.507733	0.835273	0.274696	-0.0178	-0.02928	-0.00963
-0.00069	-0.00113	-0.00037	0.01705	0.028049	0.009225	-0.0006	-0.00098	-0.00032
-0.00438	-0.00721	-0.00237	-0.00417	-0.00686	-0.00226	0.119553	0.196676	0.064681
-0.0187	-0.03076	-0.01012	-0.0178	-0.02928	-0.00963	0.510321	0.83953	0.276096
-0.00063	-0.00103	-0.00034	-0.0006	-0.00098	-0.00032	0.017137	0.028192	0.009272

結論

隨機模式描述誤差的分布，函數模式則給予觀測量、誤差與參數的數學方程式，在具備統計及幾何最佳的最小二乘模式下，誤差隨機性的前提常是資料處理者容易輕忽的事項，而導致在成果的誤判。觀測量的改正以及參數最或是值的趨勢可藉由簡易幾何、最小二乘理論以及推演的若干指標進行分析及判讀。空間資料處理者倘不知誤差型態，或者是不在意擬合過程的觀測量改正行為，往往是無法獲致妥善擬合成果。

在空間資訊課題點雲平面擬合的任務中充滿各式方位的平面，相較於間接觀測平差，廣義平差是較通用、誤差配賦較合理及成果品質較佳的模式。再者，多餘觀測矩陣提供改正數向量與誤差向量之關係，可掌握改正數配賦的大小趨勢，同時，多餘觀測矩陣也是未納入本

文探討項目的粗差偵測任務的重要引用因子^[4,6]。除此之外，點雲點位亦可能因測量方式而有著各處誤差不等的特性。實務上面臨的資料型態及擬合對象充滿多樣化，待有興趣者繼續關注並分享處理經驗。

參考文獻

1. Mikhail, E.M. and F. Ackermann (1976). Observations and least squares, Thomas Y. Crowell Company, Inc.
2. Schaffrin, B. (1994). Adjustment computations I, Class notes, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, US.
3. Schaffrin, B. (1995). Adjustment computations II, Class notes, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, US.
4. Förstner, W. (1987). Reliability analysis of parameter estimation in linear models with applications to mensuration problems in computer vision, Computer Vision, Graphics and Image Processing, 40: 273-310.
5. Horn, R.A. and C.R. Johnson (2013). Matrix analysis, 2nd ed., Cambridge University press.
6. Baarda, W. (1968). A testing procedure for use in geodetic networks, Publications on Geodesy 2, NCG, Delft, Netherlands. 