DOI: 10.6653/MoCICHE.202012_47(6).0012

貝氏定理在弱層檢核與新冠病毒檢測之應用

蔡益超／國立臺灣大學土木工程學系 名譽教授

弱層是建築物地震時遭受損壞的重要因素，如能將具弱層建築物檢測出來，進行適當的補強以消除弱層，提高其耐震能力，是降低地震損失極為快速有效的手段。要知道某一事件為真或偽，要使用適當的檢測方法進行檢測，其檢測結果的可信度，與檢測方法的精確度習習相關，此外也與你要檢測事件是大機率事件或小機率事件有關。生活中碰到這種事情的例子可謂比比皆是，本文先針對弱層檢核進行探討，其次就大眾關心的新冠病毒檢測也一併探究，分別敘述於第二節與第三節。

貝氏定理在弱層檢核之應用

檢核方法精確度倍數 A = 10 的檢核

就台灣地區所有的建築物而言，我合理的推估弱層建築物佔 20%，而我們發展的弱層檢測方法 [1]（PSERCB 弱層檢核）的精確度應該可達 98%。以下先定義幾個事件及使用的數學符號。

W = 弱層建築物　$P(W) = 0.2$

NW = 非弱層建築物　$P(NW) = 0.8$

P = 評估為弱層建築物，即陽性。

N = 評估為非弱層建築物，即陰性。

$P(P/W) = 0.98$　$P(N/W) = 0.02$

$P(NW/N) = 0.98$　$P(W/N) = 0.02$

此外定義檢測方法精確度倍數 A =（事件為真機率）/（1 －檢測方法精確度），便於結果的解釋。

貝氏機率定理如何推導，本文不擬說明，不熟悉的讀者請參閱講機率的一般教科書 [2]。貝氏機率定理可計算下列四組條件機率。

(1) 檢測出為弱層，而確實為弱層的機率

$$P(W/P) = \frac{P(P/W)P(W)}{P(P)} = \frac{0.98\times0.2}{P(P/W)P(W)+P(P/NW)P(NW)}$$

$$= \frac{0.98\times0.2}{0.98\times0.2+0.02\times0.8} = 0.925$$

(2) 檢測出為弱層，而確實非為弱層的機率（稱為偽陽性）

$$P(NW/P) = \frac{P(P/NW)P(NW)}{P(P)} = \frac{0.02\times0.8}{P(P/W)P(W)+P(P/NW)P(NW)}$$

$$= \frac{0.02\times0.8}{0.98\times0.2+0.02\times0.8} = 0.076$$

(3) 檢測出非為弱層，而確實也屬非弱層的機率

$$P(NW/N) = \frac{P(N/NW)P(NW)}{P(N)} = \frac{0.98\times0.8}{P(N/NW)P(NW)+P(N/W)P(W)}$$

$$= \frac{0.98\times0.8}{0.98\times0.8+0.02\times0.2} = 0.995$$

(4) 檢測出非為弱層，而實際屬弱層的機率（稱為偽陰性）

$$P(W/N) = \frac{P(N/W)P(W)}{P(N)} = \frac{0.02\times0.2}{P(N/NW)P(NW)+P(N/W)P(W)}$$

$$= \frac{0.02\times0.2}{0.98\times0.8+0.02\times0.2} = 0.0051$$

本例計算檢測方法精確度倍數 A = 0.2 /（1 － 0.98）= 10（倍）。從上述四種條件機率結果來看，檢測可信度還算可以，前兩個比較差，後兩個比較好。後兩者比較好係以檢核非弱層為對象，檢測方法精確度倍數 A = 0.8 /（1 － 0.98）= 40（倍）。

檢測方法精確度倍數 A = 2 的檢核

某單位採用另一種檢測方法，其精確度可達 90%，其他條件不變，則：

W = 弱層建築物　$P(W) = 0.2$

NW = 非弱層建築物　$P(NW) = 0.8$

P = 評估為弱層建築物

N = 評估為非弱層建築物

$P(P/W) = 0.9$　$P(N/W) = 0.1$

$P(NW/N) = 0.9$　$P(W/N) = 0.1$

(1) 檢測出為弱層，而確實為弱層的機率

$$P(\mathrm{W}/P)=\frac{P(P/W)P(W)}{P(P)}=\frac{0.9\times0.2}{P(P/W)P(W)+P(P/NW)P(NW)}$$
$$=\frac{0.9\times0.2}{0.9\times0.2+0.1\times0.8}=0.692$$

(2) 檢測出為弱層，而確實非為弱層的機率（稱為偽陽性）

$$P(NW/P)=\frac{P(P/NW)P(NW)}{P(P)}=\frac{0.1\times0.8}{P(P/W)P(W)+P(P/NW)P(NW)}$$
$$=\frac{0.1\times0.8}{0.9\times0.2+0.1\times0.8}=0.308$$

(3) 檢測出非為弱層，而確實也屬非弱層的機率

$$P(NW/N)=\frac{P(N/NW)P(NW)}{P(N)}=\frac{0.9\times0.8}{P(N/NW)P(NW)+P(N/W)P(W)}$$
$$=\frac{0.9\times0.8}{0.9\times0.8+0.1\times0.2}=0.973$$

(4) 檢測出非為弱層，而實際屬弱層的機率（稱為偽陰性）

$$P(C/N)=\frac{P(N/W)P(W)}{P(N)}=\frac{0.1\times0.2}{P(N/NW)P(NW)+P(N/W)P(W)}$$
$$=\frac{0.1\times0.2}{0.9\times0.8+0.1\times0.2}=0.027$$

本例計算檢測方法精確度倍數 A = 0.2 /（1 – 0.9）= 2（倍）。除了後兩個條件機率可信度勉強可以接受，前兩個應該無法接受。後兩者比較好係以檢核非弱層為對象，檢測方法精確度倍數 A = 0.8 /（1 – 0.90）= 8（倍）。

從以上計算，觀察到控制的參數是檢測方法精確度倍數 A，碰到大機率事件並採用很精確的檢測方法時，A 值很大，結果的可信度很高。碰到小機率事件並採用不精確的檢測方法時，A 值很小，結果無可信度可言。目前來看，A 值如能達到 10，應可接受。

如果挑選弱層檢核的建築物有經過簡單的篩選，譬如 1 樓挑高，或牆體打除，則 $P(W)$ 假設由 0.2 提高到 0.4，兩種方法對應的 A 值分別提高到 20 與 4 倍，當然結果的可信度也會提升。

檢測方法精確度倍數 A = 20 的檢核（假設有初步挑選）

W = 弱層建築物　$P(W) = 0.4$

NW = 非弱層建築物　$P(NW) = 0.6$

P = 評估為弱層建築物，即陽性。

N = 評估為非弱層建築物，即陰性。

$P(P/W) = 0.98$　$P(N/W) = 0.02$

$P(NW/N) = 0.98$　$P(W/N) = 0.02$

(1) 檢測出為弱層，而確實為弱層的機率

$$P(\mathrm{W}/P)=\frac{P(P/W)P(W)}{P(P)}=\frac{0.98\times0.4}{P(P/W)P(W)+P(P/NW)P(NW)}$$
$$=\frac{0.98\times0.4}{0.98\times0.4+0.02\times0.6}=0.970$$

(2) 檢測出為弱層，而確實非為弱層的機率（稱為偽陽性）

$$P(NW/P)=\frac{P(P/NW)P(NW)}{P(P)}=\frac{0.02\times0.6}{P(P/W)P(W)+P(P/NW)P(NW)}$$
$$=\frac{0.02\times0.6}{0.98\times0.4+0.02\times0.6}=0.0297$$

(3) 檢測出非為弱層，而確實也屬非弱層的機率

$$P(NW/N)=\frac{P(N/NW)P(NW)}{P(N)}=\frac{0.98\times0.6}{P(N/NW)P(NW)+P(N/W)P(W)}$$
$$=\frac{0.98\times0.6}{0.98\times0.6+0.02\times0.4}=0.987$$

(4) 檢測出非為弱層，而實際屬弱層的機率（稱為偽陰性）

$$P(W/N)=\frac{P(N/W)P(W)}{P(N)}=\frac{0.02\times0.4}{P(N/NW)P(NW)+P(N/W)P(W)}$$
$$=\frac{0.02\times0.4}{0.98\times0.6+0.02\times0.4}=0.0134$$

本例計算檢測方法精確度倍數 A = 0.4 /（1 – 0.98）= 20（倍）。從上述四種條件機率結果來看，其可信度大致優於 A=10 者，是第一種檢測方法配合 $P(W)$ = 0.4 的結果。

檢測方法精確度倍數 A = 4 的檢核（假設有初步挑選）

W = 弱層建築物　$P(W) = 0.4$

NW = 非弱層建築物　$P(NW) = 0.6$

P = 評估為弱層建築物

N = 評估為非弱層建築物

$P(P/W) = 0.9$　$P(N/W) = 0.1$

$P(NW/N) = 0.9$　$P(W/N) = 0.1$

(1) 檢測出為弱層，而確實為弱層的機率

$$P(W/P) = \frac{P(P/W)P(W)}{P(P)} = \frac{0.9\times0.4}{P(P/W)P(W)+P(P/NW)P(NW)}$$
$$= \frac{0.9\times0.4}{0.9\times0.4+0.1\times0.6} = 0.857$$

(2) 檢測出為弱層，而確實非為弱層的機率（稱為偽陽性）

$$P(NW/P) = \frac{P(P/NW)P(NW)}{P(P)} = \frac{0.1\times0.6}{P(P/W)P(W)+P(P/NW)P(NW)}$$
$$= \frac{0.1\times0.6}{0.9\times0.4+0.1\times0.6} = 0.143$$

(3) 檢測出非為弱層，而確實也屬非弱層的機率

$$P(NW/N) = \frac{P(N/NW)P(NW)}{P(N)} = \frac{0.9\times0.6}{P(N/NW)P(NW)+P(N/W)P(W)}$$
$$= \frac{0.9\times0.6}{0.9\times0.6+0.1\times0.4} = 0.931$$

(4) 檢測出非為弱層，而實際屬弱層的機率（稱為偽陰性）

$$P(W/N) = \frac{P(N/W)P(W)}{P(N)} = \frac{0.1\times0.4}{P(N/NW)P(NW)+P(N/W)P(W)}$$
$$= \frac{0.1\times0.4}{0.9\times0.6+0.1\times0.4} = 0.069$$

本例計算檢測方法精確度倍數 A = 0.4 /（1 – 0.9）= 4（倍）。從上述四種條件機率結果來看，其可信度大致優於 A = 2 者，是第二種檢測方法配合 $P(W) = 0.4$ 的結果，不過可信度還是不夠令人滿意。

結論

從以上計算可知控制變數大概為檢測方法精確度倍數 A，其值如能大於 10，可信度應該可以令人滿意。所以採用 PSERCB 弱層檢核應該可信度還不錯，若能配合事先簡單篩選，則可信度更高。

貝氏定理在新冠病毒檢測之應用

問題基本資料陳述

我國檢測的對象是有條件的，譬如有症狀或與確診者有密切接觸者等。截至十月下旬為止，約有 10 萬人被檢測，550 人確診。首先定義一些事件及所用的符號。

C = 確實感染 COVID-19　$P(C) = (550/100000) = 0.0055$

NC = 未感染 COVID-19　$P(NC) = 0.9945$

P = 核酸檢測呈陽性

N = 核酸檢測呈陰性

一般生產檢測試劑的藥廠，都宣稱該試劑檢測的精確度超過 95%。我國採用較精確的核酸檢測，可以合理假設檢測精準度如下：

$P(P/C) = 0.99$　$P(N/C) = 0.01$

$P(NC/N) = 0.99$　$P(C/N) = 0.01$

此外定義檢測方法精確度倍數 A =（事件為真機率）/（1 －檢測方法精確度），便於結果的解釋。

檢測方法精確度倍數 A = 0.55 的結果

貝氏機率定理可計算下列四組條件機率。本計算檢測方法精確度倍數 A = 0.0055 /（1 – 0.99）= 0.55（倍），所以標題這樣寫。

(1) 檢測為陽性，而確有感染之機率

$$P(C/P) = \frac{P(P/C)P(C)}{P(P)} = \frac{0.99\times0.0055}{P(P/C)P(C)+P(P/NC)P(NC)}$$
$$= \frac{0.99\times0.0055}{0.99\times0.0055+0.01\times0.9945} = 0.3538$$

(2) 檢測為陽性，而沒有感染之機率（偽陽性）

$$P(NC/P) = \frac{P(P/NC)P(NC)}{P(P)} = \frac{0.01\times0.9945}{P(P/C)P(C)+P(P/NC)P(NC)}$$
$$= \frac{0.01\times0.9945}{0.99\times0.0055+0.01\times0.9945} = 0.646$$

(3) 檢測為陰性，而沒有感染之機率

$$P(NC/N) = \frac{P(N/NC)P(NC)}{P(N)} = \frac{0.99\times0.9945}{P(N/NC)P(NC)+P(N/C)P(C)}$$
$$= \frac{0.99\times0.9945}{0.99\times0.9945+0.01\times0.0055} = 0.99994$$

(4) 檢測為陰性，而有感染之機率（偽陰性）

$$P(C/N) = \frac{P(N/C)P(C)}{P(N)} = \frac{0.01\times0.0055}{P(N/NC)P(NC)+P(N/C)P(C)}$$
$$= \frac{0.01\times0.0055}{0.99\times0.9945+0.01\times0.0055} = 0.00558$$

除第 (3)、(4) 項可接受外，(1)、(2) 項可信度差。影響檢測結果可信度與 A 值有關，事件發生機率 $P(C)$ 越大，檢測方法的精確度越高，檢測結果可信度就越好，A 值也較高。假設核酸檢測的精確度提高到 0.999 或 0.9999，其對應的 A 值會變為 5.5 及 55，檢測結果可信度定可提高，各位有興趣的話，可以練習算算看。

有時難以找到檢測精確度很高的試劑，也有變通的辦法，那就是二採陽，才認為確診。下一小節就進行這種計算。

二採陽才算確診的可信度

只要認識一採陽後，確實感染的機率 $P(C)$ 已由檢測前的 0.0055 提升為 0.3538，檢測為陰性，其未感染的機率由檢測前的 0.9945 提升為 0.99994。

二採陽，其感染的機率由 0.3538 提升為：

$$P(C/P_2)=\frac{P(P_2/C)P(C)}{P(P_2)}=\frac{0.99\times0.3538}{P(P_2/C)P(C)+P(P_2/NC)P(NC)}$$

$$=\frac{0.99\times0.3538}{0.99\times0.3538+0.01\times0.6462}=0.982$$

可被接受。此時 A = 0.3538 / (1 – 0.99) = 35.38（倍）。其他三種情況各位可練習算算看。

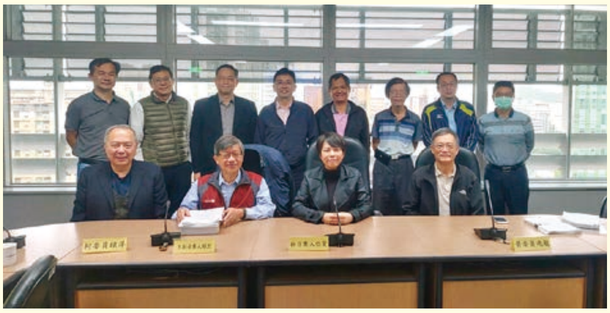
結論

本次疫情我國採用核酸檢測，但其精確度沒有查到相關數據。如以第 3.1 節取精確度 99% 計算，偽陽的機率還超過真陽。所以 550 個確診人數應扣掉偽陽者，並加進偽陰者，但偽陰機率極低，故實際感染病毒的人數應比 550 人少很多。很多人建議我們應該學外國，擴大檢測的人群，並採用快篩，如此 $P(C)$ 下降，檢測精確度也下降，其檢測結果的可信度根本不可信，所以我贊成目前的做法。不過因為偽陽性太多，如果能採用二採陽才算確診，可大大減少偽陽性。陰性檢測的可信度很高，可能無需二採陰才確定未受感染。

參考資料

1. 蔡益超、宋裕祺著，「PSERCB 弱層檢核－理論背景與系統操作」，中國土木水利工程學會出版，民國 109 年 5 月。
2. 洪華生、鄧漢忠著（英文版），蔡益超譯述，「工程或然率」，中國土木水利工程學會出版，民國 68 年 2 月。

109.12.4 混凝土新規範經營建署委託建研所審查通過



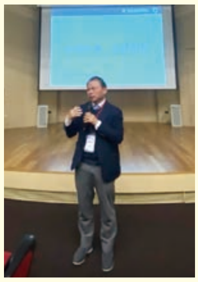
新混凝土結構設計規範審查通過全體委員合影留念

109.12.19 混凝土接構設計規範研討會 (台中場)

本研討會在台中舉辦，共 151 人報名參加，現場幾乎零缺席，並獲得與會學員一致好評。

109.12.16 BIM 資訊管理與循環營建之推動實務研討會

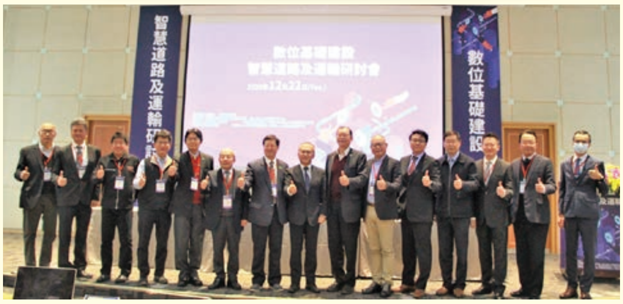
沈景鵬董事長致詞



呂良正院長專題演講

謝彥安主委演講

109.12.22 智慧道路及運輸研討會



本研討會由本學會鋪面工程委員會與社團法人中華鋪面工程學會等聯合主辦